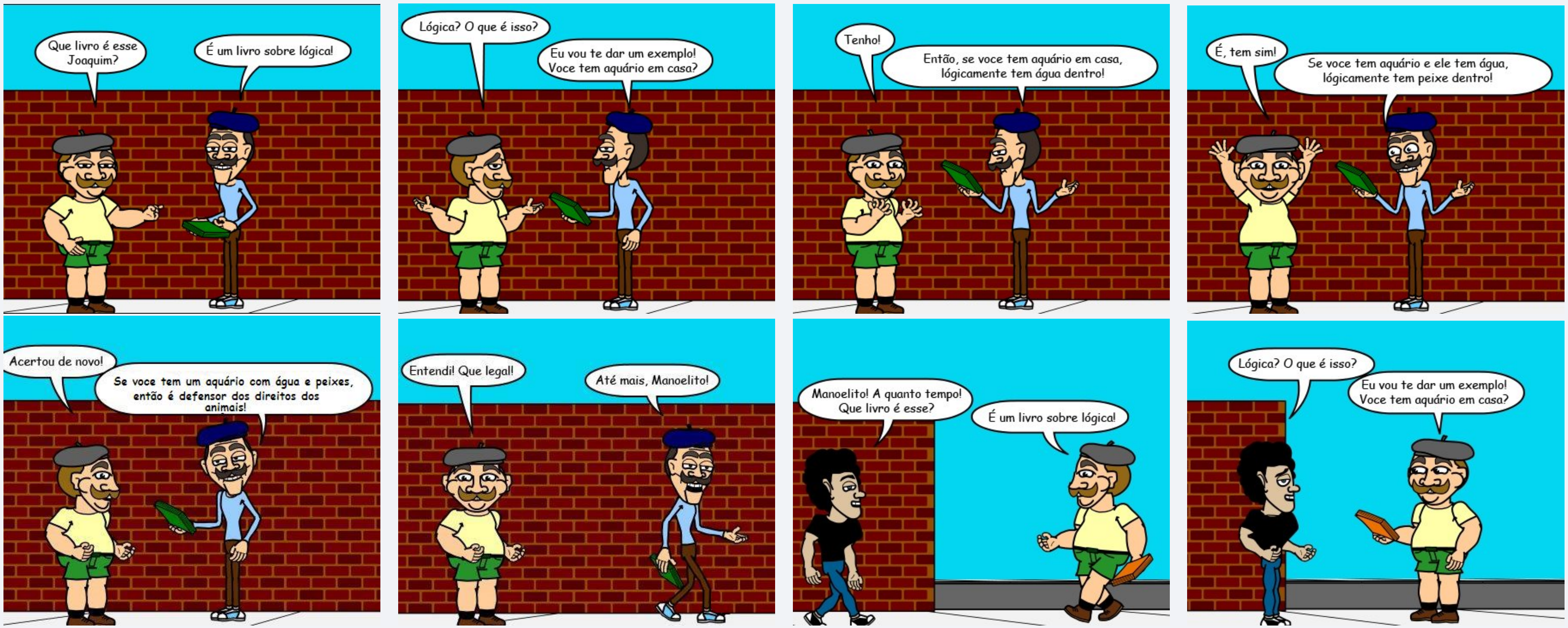
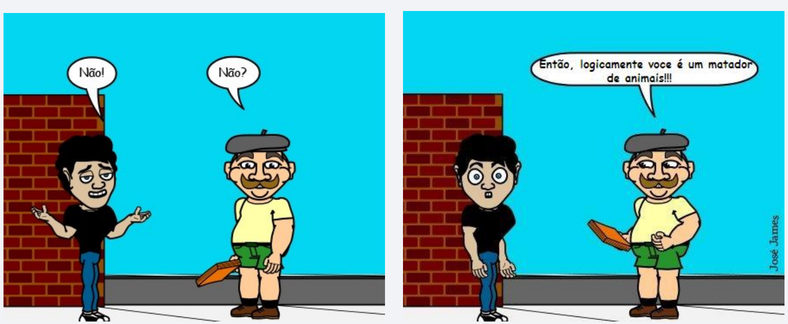
Capítulo 01: Lógica e Teoria de conjuntos





Sandra Gaspar Martins
18 de Setembro de 2009

Introdução

Para compreender bem as definições e teoremas que constituem as teorias matemáticas cujo estudo vamos iniciar, é indispensável habituarmo-nos a usar uma linguagem mais precisa e rigorosa do que a que se utiliza, em geral, na vida corrente. A aquisição desse hábito pode ser muito facilitada pelo recurso a algumas noções e símbolos da Lógica Matemática...
[Campos Ferreira, 2001]

Aristóteles

(384 a.C. — 322 a.C.) Grego

Filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande, é considerado um dos maiores pensadores de todos os tempos e **criador do pensamento lógico.**
Aristóteles figura entre os mais influentes filósofos gregos, ao lado de Sócrates e Platão, que transformaram a filosofia pré-socrática, construindo um dos principais fundamentos da filosofia ocidental. Aristóteles prestou contribuições fundantes em diversas áreas do conhecimento humano, destacando-se: ética, política, física, metafísica, lógica, psicologia, poesia, retórica, zoologia, biologia, história natural. É considerado por muitos **o filósofo que mais influenciou o pensamento ocidental**.

Lógica é a ciência do argumento correcto.

Um argumento correcto é aquele em que quem aceita as premissas tem que aceitar a conclusão. Para verificar se um argumento é correcto estuda-se a ligação entre as premissas e a conclusão.

Aristóteles fez duas observações importantes. A primeira, as outras ciências podem ser organizadas como a geometria, começando com axiomas básicos e construindo-as a partir daí. A segunda, os princípios argumentativos básicos que se usam para derivar teoremas dos axiomas são os mesmos em todas as ciências.

Os modelos de argumento que Aristóteles utilizou para estudar eram padrões particularmente simples chamados silogismos. Por exemplo:

> *Todas sardinhas são peixes.*
> *Todos os peixes nadam.*
> *Portanto, todas as sardinhas nadam.*

> *Todo o círculo é redondo.*
> *Nenhum triângulo é redondo.*
> *Nenhum triângulo é círculo. [Vann McGee, 2002]*

Aplicações

Como vimos, a Lógica serve de base à **construção do pensamento cientifico**.

Sendo portanto **utilizada por todas as ciências...**

A Lógica tem aplicação directa em diversas áreas do saber...

Na programação computacional

- If ... then... else...
- Repeat ... until...

Na electricidade

- Álgebra dos Circuitos (Álgebra Booleana):

  Um interruptor é um dispositivo ligado a um ponto de um circuito, que pode assumir um dos dois estados, "fechado"ou "aberto". No estado "fechado"(que indicaremos por 1) o interruptor permite que a corrente passe através do ponto, enquanto no estado "aberto"(que indicaremos por 0) nenhuma corrente pode passar pelo ponto... [Celina Abar, 2004]

...

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- aplicar as propriedades lógicas de forma a simplificar proposições;
- reconhecer as diferenças entre conjunções e disjunções e entre implicações e equivalências;
- utilizar convenientemente os quantificadores universal e existencial;
- interpretar e usar operações e propriedades de conjuntos;
- aplicar o raciocínio lógico de modo a saber o que pode inferir de uma proposição;
- utilizar adequadamente métodos de prova como a dedução lógica, o contra-exemplo, o contra-reciproco e o método de indução;
- seleccionar estratégias de resolução de problemas;
- utilizar o raciocínio lógico-dedutivo.

Competências globais

Também deve:

- escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- justificar os raciocínios;
- compreender e utilizar a linguagem matemática;
- utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (nestes, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a] Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Expressões

Expressões com sentido:

Sem variáveis:

Designações, termos ou nomes

Designam entes matemáticos (números, vectores, figuras geométricas...).

Exemplos:

$$2 + 3$$

par

Proposições ou frases:

Afirmações sobre entes matemáticos sobre as quais faz sentido dizer se são verdadeiras ou falsas.

Exemplos:

$$2 + 3 = 6$$

2 é par

Com variáveis:

Expressões designatórias:

Quando a concretização das variáveis as transforma em designações.

Exemplos:

$$2x + 3$$

$$\cos(t)$$

Expressões proposicionais ou condições:

Quando a concretização das variáveis as transforma em proposições.

Exemplos:

$$2x + 3 < 4$$

$3n + 1$ é par

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Se uma proposição é verdadeira diz-se que tem o **valor lógico verdadeiro**, caso contrário, diz-se que tem o **valor lógico falso**.

1. Classifique as seguintes expressões:
   a) $x > 3$
   b) $4(5+1) < 10$
   c) $(2, 3)$
   d) contínua
   e) $f'(x) > 0$
   f) $\cos(x)$
   g) $\ln(e+1) < 3$

Álgebra proposicional

No conjunto das proposições definem-se operações entre proposições que dão origem a novas proposições com valores lógicos dependentes dos valores lógicos iniciais...

...em analogia com a Álgebra elementar, onde uma operação, por exemplo a adição, entre dois números reais dá um novo número real...

Por exemplo,

sendo p uma proposição, podemos construir uma nova proposição $\sim p$,
que se lê: *não é verdade que p*.
Se a proposição p for verdadeira então $\sim p$ será falsa e vice-versa.

No que segue consideramos p, q, r, a, b e c proposições...

Negação

$$\sim p \text{ ou } \neg p$$

não é verdade que: p;
não p.

p	$\sim p$
V	V
F	

($\sim p$ é verdadeiro quando p é falso e vice-versa)

Propriedade da negação

$\sim\sim p =$

Confirmei no livro as minhas respostas.

Negue as proposições:

1. "2 é par";

2. "2+5=8";

3. "A função $f: \begin{array}{ccc} R & \to & R \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ é contínua".

Conjunção

$$p \wedge q$$

conjunção de p e q;
p e q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

(só é verdadeiro se p e q forem ambos verdadeiros)

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Propriedades da conjunção

1. $a \wedge b$ ☐ $b \wedge a$
   (prop. comutativa)
2. $(a \wedge b) \wedge c$ ☐ $a \wedge (b \wedge c)$
   ☐ $a \wedge b \wedge c$
   (prop. associativa)
3. $a \wedge V =$ ☐
   (V é o elemento neutro da conjunção)
4. $a \wedge F =$ ☐
   (F é o elemento absorvente da conjunção)
5. $a \wedge a =$ ☐
   (prop. idempotência)
6. $a \wedge \sim a =$ ☐

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Mostre a propriedade associativa usando a tabela de verdade.

2. Verifique as outras propriedades usando a tabela de verdade.

3. Simplifique usando as propriedades:
   a) $(p \wedge q) \wedge p$
   b) $(p \wedge p) \wedge q$

c) $(p \wedge \sim p) \wedge q$

d) $p \wedge (q \wedge \sim p)$

Disjunção

$$p \vee q$$

disjunção de p e q;
p ou q.

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

(só é falso se p e q forem ambos falsos)

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Propriedades da disjunção

1. $a \vee b$ ______ $b \vee a$
   (prop. comutativa)
2. $(a \vee b) \vee c$ ______ $a \vee (b \vee c)$
   ______ $a \vee b \vee c$
   (prop.associativa)
3. $a \vee V =$ ______
   (V é o elemento absorvente da disjunção)
4. $a \vee F =$ ______
   (F é o elemento neutro da disjunção)
5. $a \vee a =$ ______
   (prop. idempotência)
6. $a \vee \sim a =$ ______

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Mostre a propriedade associativa usando a tabela de verdade.

2. Verifique as outras propriedades usando a tabela de verdade.

3. Simplifique usando as propriedades:

a) $(p \vee q) \vee p$

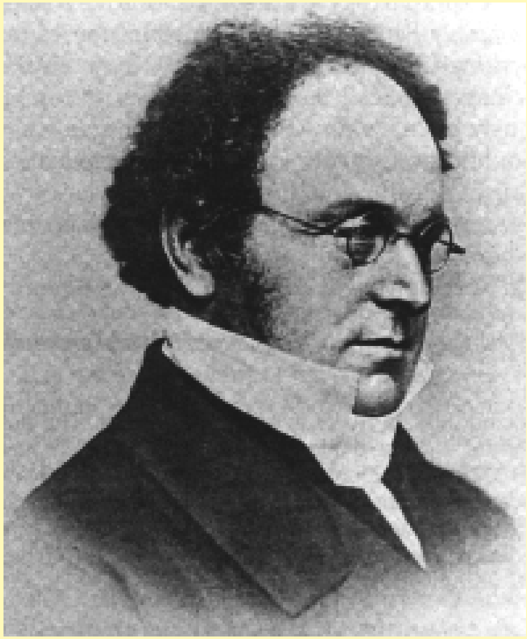
b) $(p \vee p) \vee q$

c) $(p \vee \sim p) \vee q$

d) $p \vee (q \vee \sim p)$

Augustus De Morgan

(1806—1871) Índia – Reino Unido



Formulou as Leis De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

Quinto filho de John De Morgan, um tenente-coronel em serviço na Índia, perdeu a visão do olho direito logo após o nascimento. Com sete meses de idade foi para a Inglaterra com a família e aos 10 anos perdeu seu pai.

De Morgan foi essencialmente Lógico mas escreveu trabalhos sobre os fundamentos de álgebra, calculo diferencial, lógica e teoria das probabilidades. Era sempre uma companhia agradável e um amante declarado da vida nas grandes cidades. Tinha forte inclinação por quebra cabeças e adivinhações, e quando lhe perguntavam sua idade, ele respondia: eu tinha x_1 anos de idade no ano x_2.

Propriedades envolvendo negação, conjunção e disjunção

Propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Primeiras leis de De Morgan:

$$\sim (a \wedge b) = (\sim a) \vee (\sim b)$$
$$\sim (a \vee b) = (\sim a) \wedge (\sim b)$$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Prove estas propriedades usando tabelas de verdade.

2. Utilizando as propriedades das operações lógicas mostre que:

   a) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q) = q$

   b) $(\sim p \wedge q) \wedge (p \wedge q) = F$

c) $(p\wedge \sim q)\vee \sim (p \vee q) =\sim q$

d) $((p \vee q) \wedge p) \vee (\sim p \vee q) = V$

Implicação

$$p \Rightarrow q$$

p implica q;
se p então q.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

($p \Rightarrow q$ só é falso se verdadeiro implicar falso)

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Propriedades da implicação

1. $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ ☐ $a \Rightarrow c$
   (prop. transitiva)
2. $a \Rightarrow b$ ☐ $\sim a \vee b$
3. $a \Rightarrow b$ ☐ $\sim b \Rightarrow \sim a$
   (contra recíproco)
4. $\sim (a \Rightarrow b)$ ☐ $a \wedge \sim b$
5. $((a \vee b) \Rightarrow c)$ ☐ $(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$
6. $(a \Rightarrow (b \wedge c))$ ☐ $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Equivalência

$$p \Leftrightarrow q$$

p é equivalente a q;
p se, e só se, q;
p sse q.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

(p é equivalente a q se p e q têm o mesmo valor lógico)

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Propriedades da equivalência

1. $a \Leftrightarrow b$ ☐ $b \Leftrightarrow a$
   (prop. comutativa)
2. $(a \Leftrightarrow b)$ ☐ $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
3. $(a \Leftrightarrow b) \wedge (b \Leftrightarrow c)$ ☐ $(a \Leftrightarrow c)$
   (prop. transitiva)

Prioridade dos conectivos

1º ( )
2º $\sim$
3º $\wedge$ e $\vee$
4º $\Rightarrow$
5º $\Leftrightarrow$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Utilizando as propriedades das operações lógicas mostre as igualdades:
   a) $(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \vee (q \Rightarrow \sim q)) = V$
   b) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim ((p \wedge \sim q) \wedge q) = p \vee q$

c) $[(\sim p \wedge q) \vee p] \Rightarrow (p \wedge q) =$
$(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

d) $\sim (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$
$= \sim p \wedge q$

e) $(p \vee q) \Rightarrow r = (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

f) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = (p \wedge q) \Rightarrow r$.

g) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q) = q$

Condições

Vamos agora estudar condições...
Relembremos a definição...

Condições ou Expressões Proposicionais

Expressões com variáveis que se transformam numa proposição (expressão que se pode afirmar se é verdadeira ou falsa) quando se concretizam as variáveis.

Exemplos:

- $2x + 3 = 4$
- $2n$ *é par*

Cada variável tem associado um conjunto de termos que ela pode assumir, a esse conjunto chamamos **universo** da variável.

Conjunto Solução de uma condição

Os valores da variável para os quais a condição é verdadeira.

Exemplos:

- O conjunto solução da condição $2x + 3 = 4$, para $x \in \mathbb{R}$, é
$$C.S. = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$
- O conjunto solução da condição $2n$ *é par*, para $n \in \mathbb{N}$, é
$$C.S. = \mathbb{N}.$$

Condição universal

Uma condição é **universal** se o seu conjunto solução é ______.

Condição possível

Uma condição é **possível** se o seu conjunto solução é ______ (um subconjunto que não é vazio nem é o próprio universo).

Condição impossível

Uma condição é **impossível** se o seu conjunto solução é ______.

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Exemplos:

Propriedades

Seja C uma condição, U uma condição universal e I uma condição impossível.

1. $C \wedge U =$ ☐
2. $C \wedge I =$ ☐
3. $C \wedge \sim C =$ ☐
4. $C \vee U =$ ☐
5. $C \vee I =$ ☐
6. $C \vee \sim C =$ ☐

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Quantificadores

Quantificador universal

$$\forall$$

para todo o
qualquer que seja
para cada

Afirma que uma condição com uma variável é uma condição universal num dado universo.

Quantificador existencial

$$\exists$$

existe pelo menos um
existe

Afirma que uma condição com uma variável é uma condição possível num dado universo.

Os quantificares transformam condições em proposições.

Exemplo: a condição $x > 2$ transforma-se nas proposições:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 2,$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, x > 2.$$

Estas são proposições são verdadeiras ou falsas?

Exemplo:
A negação de

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 2$$

é

Exemplo:

A negação de

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 2$$

é

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \sim (x > 2)$$

ou seja,

Exemplo:
A negação de

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 2$$

é

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \sim (x > 2)$$

ou seja,

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x \leq 2.$$

Segundas leis de De Morgan

$$\sim [\forall x \quad p(x)] = \exists x \quad \sim p(x)$$

$$\sim [\exists x \quad p(x)] = \forall x \quad \sim p(x)$$

1. Negue:
   a) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 5 > 4.$

b) $\exists n \in \mathbb{N}$, n é número primo.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} : n = 2p \Rightarrow n$ é par.
ou seja,
$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p \Rightarrow n$ é par).

1º Princípio Lógico de Equivalência

Quando numa expressão, composta por várias expressões, se substitui uma destas expressões por outra equivalente, obtém-se uma expressão equivalente à primeira.

2º Princípio Lógico de Equivalência

Quando em duas expressões equivalentes entre si, substituimos uma variável por qualquer outra expressão designatória obtemos ainda duas expressões equivalentes entre si.

1. Das duas situações seguintes, qual ilustra o 1º princípio e qual ilustra o 2º?
   a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ é verdadeiro. Substituindo o x por 3, ainda é verdadeiro que $(3+1)^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$.
   b) $3 + x + x = 4$ é equivalente a $3 + 2x = 4$.

Mapa conceptual

Construa um mapa conceptual deste capítulo. (Usando as ferramentas de edição e o *Instantâneo* do *Adobe Reader*)

(continuação)

(continuação)

Para Praticar. . . 1

Provavelmente não conhece estas matérias . . .

. . . é normal!

Vamos fazer apenas uma análise lógica . . .

1. Considere as condições elementares:

$$p: \; x < 2$$

e

$$q: \; x > -1$$

Traduza para linguagem simbólica cada uma das expressões:

a) x é menor que 2 e maior que -1.

b) x ou é menor que 2 ou menor ou igual a -1.

c) se x for menor que 2 então é maior que -1.

d) x é menor ou igual que -1 se, e só se, x é menor que 2.

2. Considere o Teorema:

Se uma função é derivável então é contínua.

a) Se tiver uma função contínua tem a certeza que ela é derivável?

b) Se tiver uma função derivável tem a certeza que ela é contínua?

c) Se tiver uma função não contínua tem a certeza que ela não é derivável?

d) Se tiver uma função não derivável tem a certeza que ela não é contínua?

e) Uma função ou não é derivável ou é contínua?

f) Uma função pode ser derivável e não contínua?

Volte às questões anteriores, formalize logicamente cada uma das expressões e confirme todas as suas conclusões utilizando as propriedades da lógica.

3. Considere o Teorema:

Toda a função contínua é integrável.

a) Se tiver uma função contínua tem a certeza que ela é integrável?

b) Se tiver uma função integrável tem a certeza que ela é contínua?

c) Se tiver uma função não contínua tem a certeza que ela não é integrável?

d) Se tiver uma função não integrável tem a certeza que ela não é contínua?

e) Uma função ou não é integrável ou é contínua?

f) Uma função pode ser não integrável e contínua?

Volte às questões anteriores, formalize logicamente cada uma das expressões e confirme todas as suas conclusões utilizando as propriedades da lógica.

4. Considere o Teorema:

Se a série de a_n é convergente então $a_n \to 0$.

a) Se tiver uma série de a_n convergente tem a certeza que a_n tende para 0?

b) Se tiver uma sucessão a_n a tender para 3 tem a certeza que a série de a_n é convergente? E de que não converge?

c) Se tiver uma sucessão a_n a tender para 0, tem a certeza que a série de a_n converge?

Volte às questões anteriores, formalize logicamente cada uma das expressões e confirme todas as suas conclusões utilizando as propriedades da lógica.

5. Considere a definição:
Uma função f diz-se injectiva se

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R} \qquad (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

a) f não é injectiva se:

b) Use o contra-reciproco para dizer de outra forma que f é injectiva:

c) Se $f(2) = f(3)$ que pode concluir quanto à injectividade de f?

d) E se $f(2) \neq f(3)$?

e) Consegue provar que f é injectiva testando alguns elementos?

f) E que não é injectiva?

6. Considere o Teorema:

   Uma sucessão monótona e não limitada tem limite infinito.

   Utilizando-o, que pode concluir?

   a) Se tiver uma sucessão monótona ela tem limite infinito?

   b) Se tiver uma sucessão não monótona ela não tem limite infinito?

   c) Se tiver uma sucessão com limite infinito que pode concluir quanto à monotonia?

   d) Uma sucessão com limite finito que pode concluir quanto à monotonia?

   e) Se tiver uma sucessão não monótona e limitada que pode concluir quanto ao limite?

7. Indique, justificando, o valor lógico das proposições:

a) $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = -2.$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : |x| = 2.$

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 1.$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{N} : \quad x = y^2$

e) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{N} : \quad y \geq x.$

f) $\forall x, \ y \in \mathbb{R} \quad x^2 - y^2 = (x - y)^2.$

g) $\forall x, \ y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} : \quad x = yz.$

h) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 1.$

i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : \quad y = x^2.$

j) $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 2 \Rightarrow x > 1).$

k) $\forall x \in \mathbb{N} \quad (x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 2).$

8. Negue as proposições:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 1.$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{N} : \quad x = y^2$

9. Dada uma proposição do tipo...

$$\forall a \qquad P(a)$$

a) Explique como deve proceder para provar que esta proposição é falsa.

b) E verdadeira?

c) Negue a expressão inicial e compare com a alínea a).

10. Dada uma proposição do tipo...

$$\exists a \qquad P(a)$$

a) Explique como deve proceder para provar que esta proposição é falsa.

b) E verdadeira?

c) Negue a expressão inicial e compare com a alínea a).

11. Voltemos à banda desenhada da capa...

a) Reescreva as falas da banda desenhada usando símbolos lógicos.

b) Qual o erro lógico cometido pelo Manoelito?

Teste moodle

Teoria de conjuntos

Operações com conjuntos

Reunião (ou união) dos conjuntos A e B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

Intersecção dos conjuntos A e B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}$$

Diferença dos conjuntos A e B:

$$A \backslash B = \{x : x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

Complementar do conjunto A:

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Produto Cartesiano dos conjuntos A e B:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) : x \in A \quad \wedge \quad y \in B\} \\ A^2 &= A \times A \end{aligned}$$

Propriedades

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- $(A^c)^c = A$
- $A^c \cup A = U$ e $A^c \cap A = \emptyset$
- $U^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = U$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Prove as propriedades distributivas.

2. Prove que:

a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$

b) $(A \cup C) \backslash B \subset (A \backslash B) \cup C$

3. Indique, justificando, o valor lógico de:
   a) $(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow B = C$
   b) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$.

c) $A^c \cap B^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cup B = U$

d) $(A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset) \Rightarrow A \cap C = \emptyset$

e) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Método de indução matemática

1. Considere a expressão

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

a) Qual o significado da expressão se n=2?

b) E se n=3?

c) E se n=1?

d) E se n=5?

e) E se n=10?

f) Use uma *folha de cálculo* para verificar que a proposição é verdadeira para n até 50. Copie para esta folha a tabela.

g) Prove que a expressão é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$

f) Use uma *folha de cálculo* para verificar que a proposição é verdadeira para n até 50. Copie para esta folha a tabela.

g) Prove que a expressão é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$

Não está a ver como fazê-lo... não é?! O método que se segue permite-nos fazê-lo com toda a simplicidade...

Método de Indução (versão 1)

Seja $C(n)$ uma condição relativa a um número natural n.
E sendo k_1 um número natural fixo.

- Se $C(k_1)$ é verdadeira.
- Se, sempre que $C(k)$ é verdadeira então $C(k+1)$ também é verdadeira.

  Então tem-se que,

  $C(n)$ é verdadeira para qualquer natural $n \geq k_1$.

Esquematicamente:

$C(k_1)$
$C(k) \Longrightarrow C(k+1)$
então
$C(n)$ (para $n \geq k_1$).

Método de Indução (versão 2)

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$, tal que:

- $1 \in X$
- Se $n \in X$ então $n+1 \in X$.

Então $X = \mathbb{N}$.

Voltando então à alínea g)...

Vamos provar que:

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Para $\boxed{n = 1}$, vejamos se a proposição é verdadeira:

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$
$$1 = 1$$

Portanto a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos que a proposição é verdadeira para um certo número k.

Para $\boxed{n = k}$, ou seja,

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(Hipótese de Indução)}$$

(continua)

Vejamos se, nesse caso, a proposição é verdadeira para o número natural seguinte...

ou seja,
para $\boxed{n = k+1}$,
será verdadeiro que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

isto é, que

$$?\, 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\, ?$$

Vamos tentar prová-lo...

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) =$$

$$= \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1)$$

por Hipótese de Indução,

$$= \frac{k(k+1)}{2} \quad + (k+1)$$

reduzindo ao mesmo denominador,

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

colocando $(k+1)$ em evidência,

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ora, temos o que queríamos provar:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Assim, pelo método de indução,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Seja $C(n)$ uma condição relativa a um número natural n. Que conclusão se pode tirar de:
   a) $C(5)$ é verdadeira e $C(i)$ ser verdadeira implica que $C(i+2)$ também o é.
   b) $C(1)$ e $C(2)$ são verdadeiras e $C(i)$ ser verdadeira implica que $C(i+2)$ também o é.
   c) $C(50)$ é verdadeira e $C(i)$ ser verdadeira implica que $C(i+1)$ e $C(i-1)$ também o são.
   d) $C(50)$ é verdadeira e $C(i)$ ser verdadeira implica que $C(i-1)$ também o é.
   e) $C(1)$ é verdadeira e $C(i)$ ser verdadeira implica que $C(4i)$ e $C(i-1)$ também o são.
   f) $C(1)$ é verdadeira e $C(2i)$ ser verdadeira implica que $C(2i+1)$ também o é.
   g) Encontre um principio para concluir que uma condição $C(n)$ é verdadeira para todos os múltiplos de 3 maiores do que 9.

2. Determine, justificando, o valor lógico das proposições seguintes.
   Pode utilizar uma *Folha de cálculo* para testar alguns valores...

   a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

   b) Soma de uma progressão geométrica:
   $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = a\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right),$
   $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

c) $n! > 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4.$

d) 2 é factor de $n^2 + n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

f) $1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + n.2^{n-1} = 1 + (n-1).2^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

g) Determine a, de modo que:
$(1+a)^p > pa + 1, \qquad \forall p \geq 2.$

h) $1 + 4 + 9 + \cdots + r^2 = (4r-3)^2, \qquad r \in \mathbb{N}.$

i) $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$

j) $n^2 > n+1, \qquad n > 1.$

3. Descubra o erro:

   Vamos provar que:

   EM QUALQUER CONJUNTO COM n GATOS, TODOS OS GATOS SÃO DA MESMA COR.

   Num conjunto com um gato, todos os gatos têm a mesma cor.

   Supondo que dado um conjunto com k gatos, todos os gatos têm a mesma cor.

   Dado um conjunto com $k+1$ gatos, retira-se um gato e fica-se com k gatos, logo têm a mesma cor. Volta-se a por esse gato e tira-se outro. Ficam k gatos logo têm a mesma cor, ou seja, o último gato é da cor dos anteriores.

   Portanto EM QUALQUER CONJUNTO COM n GATOS, TODOS OS GATOS SÃO DA MESMA COR!!!!

4. Pode utilizar uma *Folha de cálculo* para garantir que uma proposição é verdadeira para todos os números naturais? E para provar que não é verdadeira para todos os números naturais? E para testar alguns casos?

Teste moodle

Referências

- Abar, C. A. A. P. (2004). Apostila de Introdução à Lógica Matemática. http://www.ebah.com.br/apostila-de-introducao-a-logica-matematica-doc-a11941.html
- Caraça, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Tipografia matemática, Lda.
- Ferreira, C. (2001). Elementos de lógica matemática e Teoria dos Conjuntos: Folhas do IST Available from http://preprint.math.ist.utl.pt/preprints.pt.xml?serie=textos_didaticos
- McGee, V. (2002). Logic: The Art of Persuasion and the Science of Truth Available from http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Linguistics-and-Philosophy/24-241Fall-2005/Readings/index.htm, tradução da autora.

Bibliografia*

- José Alberto Rodrigues.
  Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
  Edições Colibri, 2007.
- Tiago Charters de Azevedo.
  Teoria de conjuntos e cálculo proposicional.
  Unpublished notes - ISEL, 2009.
- Jaime Campos Ferreira.
  Elementos de lógica matemática e teoria dos conjuntos: Folhas do i.s.t.
  Available from
  `http://preprint.math.ist.utl.pt/preprints.pt.xml?serie=textos_didaticos`, 2001.
- Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa.
  Teoria dos conjuntos: Folhas do i.s.t.
  Available from
  `http://preprint.math.ist.utl.pt/preprints.pt.xml?serie=textos_didaticos`, 2001.
- Salas, Hille, and Etgen.
  Calculus: One variable.
  John Wiley Sons, Inc., 9th edition, 2003.
- Dale Varberg and Edwin J. Purcell.
  Calculus.
  Prentice-Hall, Inc., 7th edition, 1997.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.

Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)