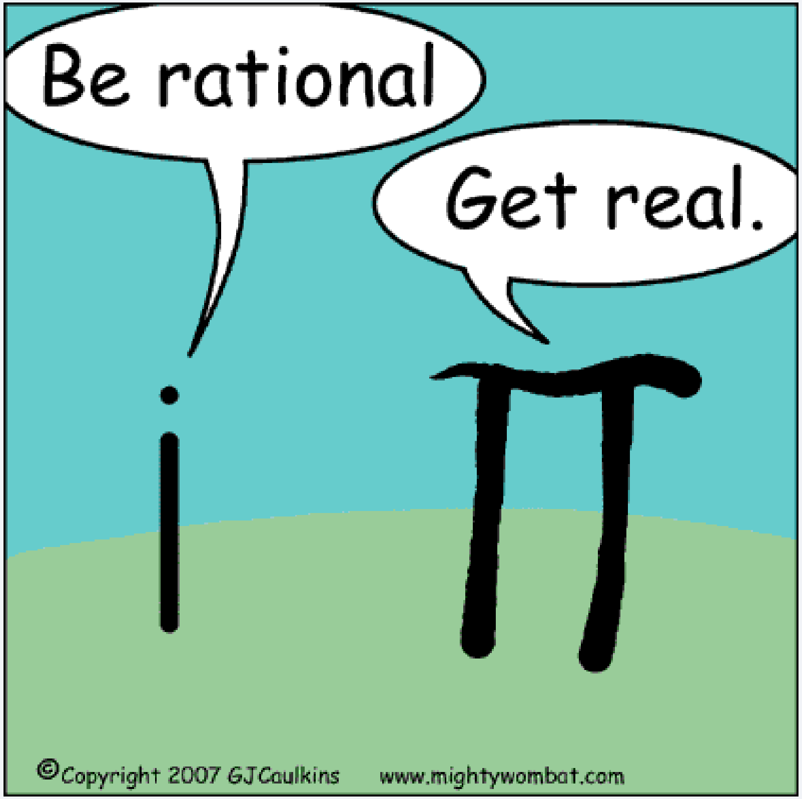
Capítulo 02: Números reais



Sandra Gaspar Martins

05/10/2009

Introdução

$\mathbb{N}$

Os números naturais surgiram desde os primórdios com a necessidade de contar alimentos, rebanhos, pessoas, dias...

0

O zero já não tem uma existência natural, ninguém começa a contar: 0, 1, 2, 3, ...

> *A criação de um símbolo para representar o nada constituiu um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão! Essa criação é relativamente recente (talvez pelos primeiros séculos da era cristã) e foi devida às exigências da numeração escrita. [**?**]*

$\mathbb{Z}$

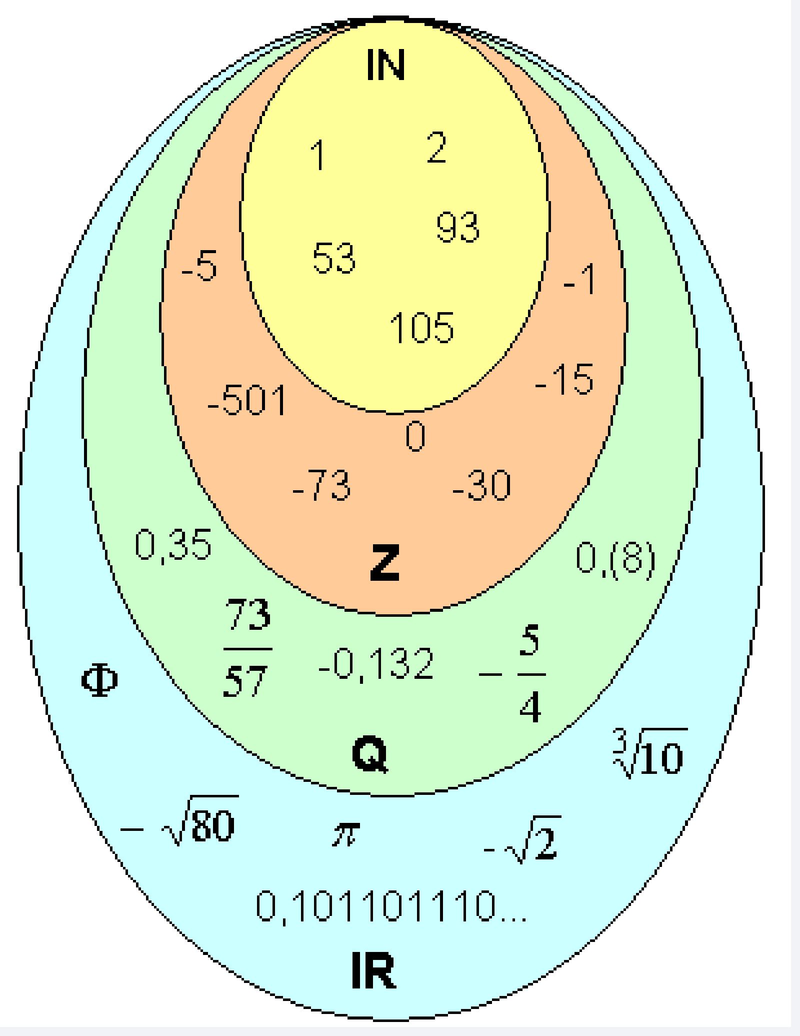
Os números inteiros surgiram com a economia e a necessidade de ficar *a dever*...

$\mathbb{Q}$

Com a necessidade da divisão de terras deu-se o desenvolvimento da geometria e a consequente criação dos números racionais (razões, quocientes (daí o símbolo $\mathbb{Q}$), divisões de uma quantidade por outra)...

$\mathbb{R}$

Ao tentar encontrar o valor exacto do lado de um quadrado com área 2, surgiu a necessidade de criação dos números irracionais... Estes números são entes matemáticos, criações da mente humana, impossíveis de encontrar numa régua, impossíveis de introduzir numa calculadora (que não faça cálculo simbólico) mas que nos permitem realizar cálculos com rigor infinito...


IN
1
2
93
53
105
-5
-1
-15
-501
0
-73
-30
Z
0,35
0,(8)
$\frac{73}{57}$
-0,132
$-\frac{5}{4}$
Q
Φ
$\sqrt[3]{10}$
$-\sqrt{80}$
π
$-\sqrt{2}$
0,101101110...
IR

Neste capítulo vamos estudar os **números reais**...

A forma como se definem, os **axiomas** que lhe servem de base.

Vamos estudar as suas **propriedades** de forma a conhecê-los profundamente...

Permitindo assim que consigamos **utilizá-los** e **manipulá-los** de uma forma eficiente!

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- desembaraçar-se de módulos em expressões;
- fazer majorações adequadas;
- fazer o paralelo entre somas escritas por extenso e utilizando o símbolo de somatório;
- aplicar as propriedades dos somatórios, dos módulos e das potências;
- resolver desigualdades envolvendo módulos;
- conhecer as propriedades dos números reais;
- seleccionar estratégias de resolução de inequações;
- deduzir propriedades de números reais a partir de outras.
- averiguar a veracidade de uma propriedade utilizando contra-exemplos ou uma dedução lógica.

Competências globais

Também deve:

- escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- justificar os raciocínios;
- compreender e utilizar a linguagem matemática;
- utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (nestes, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a] Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Axiomática

Vejamos em seguida como definir de uma forma rigorosa este conjunto (que já se conhece do ensino secundário) dos números reais...

Vamos introduzir os axiomas que formam a base dos números reais...

É a partir destes axiomas que se constroem proposições que nos permitem conhecer melhor as propriedades deste conjunto e utilizá-lo de uma forma eficiente...

Axiomas de corpo comutativo

1. Em $\mathbb{R}$ estão definidas 2 operações binárias, a adição (ou soma) "+" e a multiplicação (ou produto) "$\cdot$", que verificam as propriedades comutativa e associativa.
2. A multiplicação é distributiva em relação à adição.
3. Existe dois elementos neutros distintos, respectivamente da adição e da multipicação.
4. Todo o número real tem simétrico.
5. Todo o número real não nulo admite inverso.

1. Ilustre estes axiomas.

Dos axiomas anteriores podemos deduzir as seguintes proposições...

Lei do corte para a adição e multiplicação

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + z = y + z => x = y.$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0 \quad x \cdot z = y \cdot z => x = y.$

Possibilidade e unicidade da subtracção

- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists^1 z : x = y + z.$

Possibilidade e unicidade da divisão

- $\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0 \quad \exists^1 z : x = y \cdot z.$

Axiomas de ordem

- Existe em $\mathbb{R}$ um subconjunto $\mathbb{R}^+$, denominado conjunto dos números reais positivos, fechado para a adição e multiplicação.
- Os conjuntos $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_-$ constituem uma partição disjunta de $\mathbb{R}$.

Usando os axiomas de ordem podemos definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}$...

Relação de ordem

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ dizemos que $a < b$ se $b + (-a) \in \mathbb{R}^+$.
- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ dizemos que $a \leq b$ se $a < b$ ou $a = b$.

Propriedades da relação de ordem "$\leq$"

1. "$\leq$" é uma relação de ordem total, ou seja,
   1.1 Para qualquer número real a temos que $a \leq a$.
   1.2 Dados dois números reais a e b, temos que
   $$a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \qquad \Rightarrow a = b$$
   1.3 Dados dois números reais a, b e c, temos que
   $$a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \qquad \Rightarrow a \leq c.$$
2. Dados dois números reais a e b, temos que
   $$a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a$$
3. $a \leq b \quad \Rightarrow a + c \leq b + c.$
4. $a \leq b \quad \Rightarrow ac \leq bc,$ se c>0.

Já só falta o axioma que *obriga* a que os irracionais pertençam a este conjunto...

Axioma do supremo

Todo o conjunto de números reais não vazio e majorado (minorado) admite supremo (ínfimo).

1. Estude a veracidade do axioma do supremo se a palavra *reais* fosse substituída por:
   a) racionais;
   b) naturais.

Chamamos então

O conjunto dos **números reais**,

$$\mathbb{R}$$

a um conjunto de objectos (que não se definem)
mas que se supõe verificarem determinadas propriedades básicas,
expressas num certo número de axiomas.
A partir destas podem-se deduzir todas as propriedades dos números reais...[**?**]

Números Naturais: $\mathbb{N}$

1, 2, 3, 4,....

Números Inteiros: $\mathbb{Z}$

.....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,....

Números Racionais: $\mathbb{Q}$

Fracções , ou seja,
dizimas finitas ou infinitas periódicas.

Exemplos:

- $\frac{1}{5} = 0,2$
- $\frac{1}{3} = 0,333(3)$
- $\frac{23}{99} = 0,2323(23)$

Números Irracionais: $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Dízimas infinitas não periódicas.

Exemplos:

- $\pi = 3.141 \ldots.$
- $e = 2.7183\ldots$
- $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$

Números Reais: $\mathbb{R}$

Todos os números racionais e irracionais.

Exemplos:

- -10
- $\pi = 3.141 \ldots.$
- $2.(718)$
- -435.32

1. Indique um racional e um irracional entre:
   a) 3.14 e 3.15;
   b) 2.7312123 e 2.7312124;
   c) 2.(24) e 2.(243).

Teorema

Entre dois racionais existe um irracional.

Teorema

Entre dois irracionais existe um racional.

Teorema

Em qualquer intervalo de números reais $]a, b[$, $(a < b)$ existem infinitos racionais e infinitos irracionais.

Somatórios e produtórios

Somatórios e produtórios

são apenas formas condensadas de escrever somas e produtos...

Somatório

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são n números reais.

Produtório

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$$ onde

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são n números reais.

Exemplos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} 2^k &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ &= 62\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{4} 2^k &= 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \\ &= 2 \times 4 \times 8 \times 16 \\ &= 1024\end{aligned}$$

1. Escreva por extenso:

a) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

b) $\sum_{j=0}^{5} 3^{2j}$

c) $\sum_{k=1}^{4} (k+3)$

d) $\sum_{n=0}^{3} (n-2)^n$

e) $\sum_{n=0}^{3} (3j)^n$

f) $\sum_{0\leq i,j<3} a_{ij}$

g) $\prod_{k=1}^{4} k$

1. Escreva usando o símbolo de somatório ou produtório:

   a) $2+4+6+8+10+12+14+16+18$

   b) $3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$

   c) $5+7+9+11+13+15+....+51$

   d) $9+16+25+36+49+64+81$
   (escreva de duas formas diferentes)

   e) $4+8+16+32+64+128$

   f) $1\times 4 \times 9 \times 16 \times 25 \times 36$

Propriedades dos somatórios

- propriedade aditiva:
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$
- propriedade homogénea:
$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (c\in\mathbb{R})$$
- propriedade telescópica:
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$$
- mudança de índice:
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=p+1}^{n+p}a_{k-p} \quad (p\in\mathbb{N})$$

1. Mostre a propriedade telescópica.

2. Mostre a propriedade de mudança de índice.

3. Sabendo que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ determine o valor de:

a) $\sum_{j=1}^{200}(2j+5)$

b) $\sum_{r=1}^{50} r - 3$

c) $\sum_{s=1}^{n} (as + b)$

d) $\sum_{n=0}^{20} 5$

e) $\sum_{r=1}^{20} ((r+1)^2 - r^2)$

4. Determine A e B de modo a obter igualdades verdadeiras:

a) $\displaystyle\sum_{k=10}^{50} k^5 = \sum_{k=1}^{A} B^5$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} (2k+3) = \sum_{k=5}^{A} B$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{j=3}^{A} B$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} 5^n = \sum_{n=3}^{10} 5^n + A$

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} 2^k = 2^A$

5. Simplifique, usando as propriedades dos somatórios, até chegar a um valor.

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=3}^{12}(n+3) + \sum_{n=2}^{11}(2n+1) - \sum_{n=1}^{8}(n+1)^2$$

Módulos

O **módulo** de um número
é o seu valor absoluto...
o seu valor sem sinal...
o seu *comprimento*...
a sua *intensidade*...

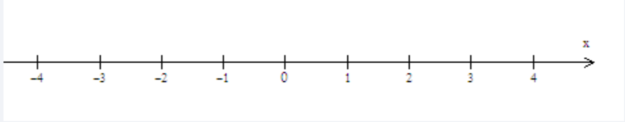
Módulo ou Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Calcule.
   a) $|-3| =$
   b) $|3.2| =$
   c) $|-5.7| =$
   d) $|200.5| =$
   e) $|-\frac{13}{5}| =$
   f) $|2-\pi| =$
   g) $|5+e| =$
   h) $|2\pi-1| =$
   i) $|e-1| =$

2. Desenvolva.
   a) $|x+2| =$
   b) $|2x| =$
   c) $|4-x| =$
   d) $|-x| =$

3. Quais os números cujo módulo é menor que 3?
   a) Escolha entre estes:
      i) ☐ 1
      ii) ☐ -4
      iii) ☐ 1000
      iv) ☐ 0.3
      v) ☐ $-\frac{1}{5}$
      vi) ☐ 5
      vii) ☐ π
      viii) ☐ -2.999
   b) Represente este conjunto na recta dos reais:



   c) Represente-o como um intervalo:

   d) Outra representação:

Consegue generalizar?

$$|x| < a, \qquad (a > 0)$$

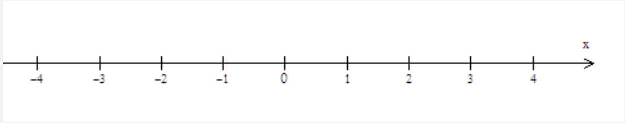
é equivalente a :

4. Quais os números cujo módulo é maior que 3?

   a) Escolha entre estes:

      i) ☐ 1
      ii) ☐ -4
      iii) ☐ 1000
      iv) ☐ 0.3
      v) ☐ $-\frac{1}{5}$
      vi) ☐ 5
      vii) ☐ π
      viii) ☐ -2.999

   b) Represente este conjunto na recta dos reais:



   c) Represente-o como um intervalo ou união de intervalos:

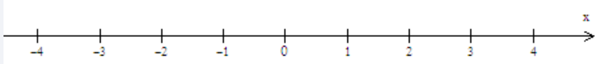
   d) Outra representação:

Consegue generalizar?

$$|x| > a, \qquad (a > 0)$$

é equivalente a :

5. Quais os números cujo módulo é menor que -3?
   a) Escolha entre estes:
      i) ☐ 1
      ii) ☐ -4
      iii) ☐ 1000
      iv) ☐ 0.3
      v) ☐ $-\frac{1}{5}$
      vi) ☐ 5
      vii) ☐ π
      viii) ☐ -2.999
   b) Represente este conjunto na recta dos reais:



   c) Represente-o como um intervalo:

   d) Outra representação:

Consegue generalizar?

$$|x| < a, \qquad (a < 0)$$

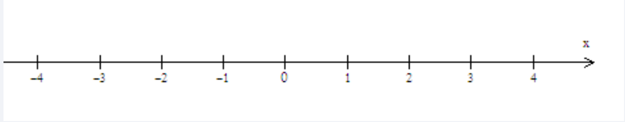
é equivalente a :

6. Quais os números cujo módulo é maior que -3?

a) Escolha entre estes:

- i) ☐ 1
- ii) ☐ -4
- iii) ☐ 1000
- iv) ☐ 0.3
- v) ☐ $-\frac{1}{5}$
- vi) ☐ 5
- vii) ☐ π
- viii) ☐ -2.999

b) Represente este conjunto na recta dos reais:



c) Represente-o como um intervalo:

d) Outra representação:

Consegue generalizar?

$$|x| > a, \qquad (a < 0)$$

é equivalente a :

resumindo...

Propriedades dos módulos

Para $a > 0$:

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in]-a, a[$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$$

Para $a < 0$:

$$|x| < a \Leftrightarrow \text{Condição impossível}$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Propriedades dos módulos

1. $|x| \quad 0$
2. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x =$
3. $|x| \quad \sqrt{x^2}$
4. $|x| \quad |-x|$
5. $|x-y| \quad |y-x|$
6. $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \mathbb{R}^+)$
7. $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \mathbb{R}^-)$
8. $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \mathbb{R}^+)$
9. $|x| > a \quad \Leftrightarrow \quad (a \in \mathbb{R}^-)$
10. $|x|\,|y| \quad |xy|$,
    mais $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| \quad \prod_{i=1}^{n} |x_i|$
11. $|x|^s \quad |x^s|, \quad s \in \mathbb{R} \ (s < 0 \Rightarrow x \neq 0)$
12. $|x+y| \quad |x|+|y|$,
    mais $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
13. $|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)\left(|y_1|^2 + |y_2|^2\right)$,
    Desigualdade de Cauchy-Schwarz
    $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)$
14. $||x|-|y|| \quad |x-y|$
15. $\max(x,y) \quad \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$
16. $\min(x,y) \quad \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$
17. $|x| < |y| \quad x^2 < y^2$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

7. Indique expressões equivalentes a:

a) $|x| < 5$

b) $|x| > 2$

c) $|x| < -10$

d) $|x| > -5$

e) $|x| \leq 1$

f) $|x| \geq 5$

g) $|x| = 3$

h) $|x| = -2$

8. Identifique o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, das condições:

   a) $|x| < 5$

   b) $|x| > 3$

c) $|x+5|<2$

d) $|x-4|>3$

e) $|x+3|-|1-x|<2$

f) $|x-2|+|4+x|\geq 3$

g) $\left|x^2-4\right|=x+1$

h) $\left|x^2-2x+1\right|-x^2\leq|x-1|$

i) $\left|x^2+1\right|-x+5\,|2-x|>|3x-6|$

j) $e^x(|x-5|+2x)\geq 0$

k) $2xe^x - |x-3|\, e^x < 0$

l) $|x-3a| < 2a, \quad (a \in \mathbb{R})$

9. Determine os valores possíveis para A de modo que a afirmação seja verdadeira:

   a) Se $|x-1|<1$, então $|2x-4|<A$;

   b) Se $|x+1|<A$, então $|3x+3|<4$.

10. Para $b > 0$,

$$|x - a| < b$$

é equivalente a

$$\boxed{} < x - a < \boxed{}$$

ou seja,

$$\boxed{} < x < \boxed{}$$

em linguagem corrente:

ilustre graficamente:

Encontre uma desigualdade da forma $|x - a| < b$ que tenha como solução o intervalo

a) $]-3, 3[$

b) $]0, 6[$

c) $]-3, 7[$

d) $]-7, 3[$

Majorações

Definições

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- **majorante de A** é qualquer número real M: $M \geq x, \quad \forall x \in A$.
- **minorante de A** é qualquer número real m: $m \leq x, \quad \forall x \in A$.
- **supremo de A** é o menor dos majorantes de A.
- **ínfimo de A** é o maior dos minorantes de A.
- **máximo de A** é o menor dos majorantes se ele pertencer a A.
- **mínimo de A** é o maior dos minorantes se ele pertencer a A.

Estes conjuntos/elementos podem não existir.

Definições

Um conjunto é **majorado** se possuir majorante e **minorado** se possuir minorante. É **limitado** se possuir majorante e minorante.

1. Indique, se existirem, os majorantes e os minorantes, o supremo e o ínfimo, o máximo e o mínimo. É um conjunto limitado?
   a) $[1, +\infty[$
   b) $]-\infty, -7[\cup[-3, -1[$
   c) $\{1, 2, 23, 45\}$
   d) $[-4, \pi] \cap \mathbb{Q}$

Erros frequentes

Da vasta experiência de ensino em anos anteriores sabemos que muitos alunos não dominam, como era esperado, muitas das propriedades dos números reais...

Teste-se e, caso seja um aluno com dificuldades nestas propriedades procure uma forma de resolver este problema...

- Resolva todos os exercícios que aqui propomos...
- Peça ajuda ao professor e vá anotando todas as regras que desconhece...
- Pegue nos livros do secundário e faça uma revisão...
- Vá ao site que indicamos e pratique...
- Procure outros sites de apoio...
- ...

É da SUA RESPONSABILIDADE dominar a manipulação algébrica!!!

É muito importante que o faça pois, pois para além do erro directo, um *erro de contas* leva na maioria das vezes a um novo problema com uma dificuldade acrescida, ou mesmo impossível... pelo que, se fizer muitos erros de contas estará a aumentar muito o grau de dificuldade da sua avaliação...

1. Qual o valor lógico das seguintes afirmações?

a) $\dfrac{2}{3+x} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{x}$

b) $\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$

c) $x + \cancel{\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt{3}}(x+5) \Rightarrow \; x + 1 = x + 5$

d) $\dfrac{a + 5\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \dfrac{a+5}{3}$

e) $\cancel{5}(x+3) = \cancel{5}x + \cancel{5} \Rightarrow \; x + 3 = x + 1$

f) $\cancel{2}x + 3x = \cancel{2} + x \;\Rightarrow\; x + 3x = x$

g) $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$

h) $\dfrac{2+x}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{3}$

i) $\dfrac{3+6x}{3x} = \dfrac{1+2x}{x}$

j) $\cancel{2} + 3x = \cancel{2} + x \;\Rightarrow\; 3x = x$

k) $x(x-3) = 0 \Rightarrow \; x = 0 \vee x = 3$

l) $x(x+4) = 5 \;\Rightarrow\; x = 5 \vee x = 1$

m) $x + 1 < 3x \;\Rightarrow\; 2(x+1) < 6x$

n) $3x + 1 < 4 \;\Rightarrow\; -4(3x+1) < -16$

Voltemos aos exemplos:

$$\frac{2}{3+x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x}$$

$$\frac{2+x}{3}=\frac{2}{3}+\frac{x}{3}$$

Porque podemos separar somas no numerador mas não no denominador!!!

Vejamos estes exemplos evidentes:

$$\frac{2}{1+1}\neq\frac{2}{1}+\frac{2}{1}$$

$$\frac{1+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

Propriedades dos números reais

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}*$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Voltemos aos exemplos:

$$\cancel{2}x + 3x = \cancel{2} + x \;\Rightarrow\; x + 3x = x$$

$$\cancel{2} + 3x = \cancel{2} + x \;\Rightarrow\; 3x = x$$

Porque, aqui, *cortar* significa subtrair o mesmo número em ambos os membros de uma igualdade... só podemos *cortar* quando o mesmo número está a somar em ambos os membros da igualdade!!!

Propriedades dos números reais

$$a + b = a + c \;\Rightarrow\; b = c$$

$$ab + c = a + d \;\not\Rightarrow\; b + c = d^{*}$$

*Em geral não é uma implicação, embora possa existir implicação nalguns casos particulares.

Voltemos aos exemplos:

$$\cancel{5}(x+3) = \cancel{5}x + \cancel{5} \Rightarrow \; x+3 = x+1$$

$$x + \cancel{\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt{3}}(x+5) \Rightarrow \; x+1 = x+5$$

Porque, aqui, *cortar* significa dividir ambos os membros da igualdade pelo mesmo número... só podemos *cortar* quando o mesmo número multiplica ambos os membros de uma equação!!!

Vejamos estes exemplos evidentes:

$$2(x+1) = 2(3x) \Rightarrow x+1 = 3x$$

$$2x+1 = 2(3x) \not\Rightarrow x+1 = 3x$$

Propriedades dos números reais

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

$$ab + c = ad \not\Rightarrow b + c = d^{*}$$

*Em geral não é uma implicação, embora possa existir implicação nalguns casos particulares.

Voltemos aos exemplos:

$$\frac{a+5\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{a+5}{3}$$

$$\frac{3+6x}{3x} = \frac{1+2x}{x}$$

Porque, aqui, *cortar* significa dividir o numerador e o denominador de uma fracção pelo mesmo número... só podemos *cortar* quando o mesmo número multiplica o numerador e o denominador de uma fracção!!!

Propriedades dos números reais

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+bc}{cd} \neq \frac{a+b}{d}*$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Voltemos aos exemplos:

$$\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$$

$$\sqrt{(1-x)^2} = 1-x$$

Porque,

$$\sqrt{x^2} \neq x, \text{ para } x<0.$$

Vejamos

$$\sqrt{(-3)^2} \neq -3$$

pois

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{\square} = \square$$

Propriedades dos números reais

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

1. Sabendo que $xy = 12$ então:
   - se $x = 3$, $y =$ ☐
   - se $x = 6$, $y =$ ☐
   - se $x = \frac{1}{2}$, $y =$ ☐
   - se $x = 0.3$, $y =$ ☐
   - se $x = 1.5$, $y =$ ☐
2. Sabendo que $xy = 0$ então:
   - se $x = 3$, $y =$ ☐
   - se $x = 6$, $y =$ ☐
   - se $x = \frac{1}{2}$, $y =$ ☐
   - se $x = 0.3$, $y =$ ☐
   - se $x = 1.5$, $y =$ ☐
3. Indique o valor lógico:
   - $x(y+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; y+1 = 0$
   - $x(y+1) = 1 \;\Rightarrow\; x = 1 \;\vee\; y+1 = 1$

Propriedades dos números reais

Lei do anulamento do produto

$$ab = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \;\vee\; b = 0$$

$$ab = c \;\not\Rightarrow\; a = c \;\vee\; b = c, \qquad c \in \mathbb{R}\backslash 0^{*}$$

*Em geral não é uma implicação, embora possa existir implicação nalguns casos particulares.

Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade...

por 2:

$$3 > 2 \quad \Rightarrow \quad 6 \,\boxed{}\, 4$$

mantém a desigualdade!

por -1:

$$3 > 2 \quad \Rightarrow \quad (-1) \times 3 \,\boxed{}\, (-1) \times 2 \quad \Rightarrow \quad -3 \,\boxed{}\, -2$$

inverte a desigualdade!

por -5 (que é multiplicar por 5 e por -1):

$$3 > 2 \quad \Rightarrow \quad 5 \times 3 \,\boxed{}\, 5 \times 2 \quad \Rightarrow \quad -15 \,\boxed{}\, -10$$

inverte a desigualdade!

Vejamos:

$x + 3 < 2x \;\Rightarrow\; 2(x+3) < 4x$

$5x + 1 < 2 \;\Rightarrow\; -4(5x+1) < -8$

Propriedades dos números reais

$$a < b \;\Rightarrow\; ac < bc \qquad (c > 0)$$

$$a < b \;\Rightarrow\; ac > bc \qquad (c < 0)$$

ou seja,
multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo mantém a desigualdade, por um número negativo inverte a desigualdade.

1. Qual o valor lógico das seguintes afirmações?

a) $5^3.5^2 = 5^6$

b) $2^5.2^3 = 2^8$

c) $4^6.2^3 = 8^9$

d) $2^5.3^4 = 6^{20}$

e) $2^5 + 2^4 = 2^9$

f) $3^4 + 3^5 = 3^{20}$

g) $\frac{2^7}{2^3} = 2^4$

h) $\frac{2^7}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

i) $\frac{4^3}{4^4} = 4^{-1}$

j) $\frac{4^8}{4^2} = 4^4$

k) $\left(2^5\right)^4 = 2^{20}$

l) $\left(5^3\right)^2 = 5^5$

m) $(2x)^2 = 4x^2$

n) $(5x)^3 = 5x^5$

o) $(2+x)^2 = 4 + x^2$

p) $(2-x)^2 = 4 - x^2$

q) $\sqrt{x^2+4} = x + 2$

r) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} + \sqrt{3}$

Relembre:

$$4^3.4^2 = 4.4.4.\ 4.4 = 4.4.4.4.4 = 4^5$$

Voltemos aos exemplos:

$5^3.5^2 = 5^6$

$2^5.2^3 = 2^8$

$4^6.2^3 = 8^9$

$2^5.3^4 = 6^{20}$

$2^5 + 2^4 = 2^9$

$3^4 + 3^5 = 3^{20}$

Propriedades das potências

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$

ou seja, o **produto** de potências com a **mesma base** é igual a outra potência com essa base cujo expoente é a **soma** dos expoentes dados.

$$a^b.a^c \neq a^{bc*}$$

$$a^b + a^c \neq a^{b+c*}$$

$$a^b.c^d \neq (a.c)^{b+d*}$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Relembre:

$$\frac{5^6}{5^4} = \frac{5.5.5.5.5.5}{5.5.5.5} = \frac{\cancel{5.5.5.5}.5.5}{\cancel{5.5.5.5}} = 5.5 = 5^2$$

$$\frac{5^4}{5^6} = \frac{5.5.5.5}{5.5.5.5.5.5} = \frac{\cancel{5.5.5.5}}{\cancel{5.5.5.5}.5.5} = \frac{1}{5.5} = 5^{-2}$$

Voltemos aos exemplos:

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^4$$

$$\frac{2^7}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{4^3}{4^4} = 4^{-1}$$

$$\frac{4^8}{4^2} = 4^4$$

Propriedades das potências

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

ou seja, o **quociente** de potências com a **mesma base** é igual a outra potência com essa base cujo expoente é a **subtracção** dos expoentes dados.

$$\frac{a^b}{a^c} \neq a^{b/c}\,{}^*$$

$$\frac{a^b}{c^d} \neq \frac{a^{b-d}}{c}\,{}^*$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}\,{}^*$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Relembre:

$$\left(5^2\right)^3 = 5^2.5^2.5^2 = 5.5.\ 5.5.\ 5.5 = 5^6$$

Voltemos aos exemplos:

$\left(2^5\right)^4 = 2^{20}$

$\left(5^3\right)^2 = 5^5$

Propriedades das potências

$$\left(a^b\right)^c = a^{b.c}$$

ou seja, a potência de potência é igual a outra potência com essa base cujo expoente é o **produto** das potências.

$$\left(a^b\right)^c \neq a^{b+c*}$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Relembre:

$$(ab)^3 = ab.ab.ab = aaa.bbb = a^3.b^3$$

Voltemos aos exemplos:

$(2x)^2 = 4x^2$

$(5x)^3 = 5x^5$

Propriedades das potências

$$(ab)^c = a^c.b^c$$

$$(ab)^c \neq ab^{c*}$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Relembre:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa-ab-ba+bb = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)\,(a-b) = aa-ab+ba+bb = a^2+b^2$$

Voltemos aos exemplos:

$(2+x)^2 = 4+x^2$

$(2-x)^2 = 4-x^2$

Propriedades das potências

Casos notáveis

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)\,(a-b) = a^2+b^2$$

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^{2^*}$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

As propriedades que ilustrámos com potências de números naturais também são válidas com potências de números reais (com valores positivos na base).

Inclusive, como $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, temos que, a *raiz* tem as propriedades das potências...

Relembre:

$$\sqrt{9\times 4}=\sqrt{36}=6=3\times 2=\sqrt{9}.\sqrt{4}$$

$$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\neq 5=3+2=\sqrt{9}+\sqrt{4}$$

Voltemos aos exemplos:

$\sqrt{x^2+4}=x+2$

$\sqrt{x+3}=\sqrt{x}+\sqrt{3}$

$\sqrt{9x^2}=9|x|$

$\sqrt{9+x}=3+\sqrt{x}$

$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

Propriedades das raízes

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}^{*}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b^{*}$$

$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}^{*}$$

$$\sqrt{a^2-b^2}\neq a-b^{*}$$

*É diferente em geral, embora possa existir igualdade nalguns casos particulares.

Resumindo...

Propriedades dos números reais

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$a + \cancel{b} = c + \cancel{b} \Rightarrow a = c$$

$$a\cancel{b} = c\cancel{b} \Rightarrow a = c$$

$$\frac{a\cancel{b}}{c\cancel{b}} = \frac{a}{c}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$$

$$a < b \Rightarrow ac < bc \quad (c > 0)$$

$$a < b \Rightarrow ac > bc \quad (c < 0)$$

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad (a > 0)$$

$$|x| > a \Rightarrow x < -a \ \vee \ x > a \quad (a > 0)$$

Propriedades dos números reais*

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$a + \cancel{b} = c + \cancel{b}d \not\Rightarrow a = c + d$$

$$\cancel{a}b + c = \cancel{a}d \not\Rightarrow b + c = d$$

$$\frac{a+\cancel{b}}{c\cancel{b}} \neq \frac{a}{c}$$

$$\sqrt{x^2} \neq x \quad (x < 0)$$

$$ab = c \not\Rightarrow a = c \ \vee \ b = c \quad (c \neq 0)$$

$$|x| > a \not\Rightarrow x > \pm a \quad (a > 0)$$

Os símbolos de $\neq$ e $\not\Rightarrow$ significam que, em geral, estas propriedades com $=$ e $\Rightarrow$ não são válidas, embora possam ser válidas nalguns casos particulares.

Sugestão: Acrescente a esta página todas as outras propriedades em que vai tendo dúvidas...

Propriedades das potências

$$a^b.a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^c.b^c = (ab)^c$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Propriedades das potências *

$$(a+b)^c \neq a^c + b^c$$

$$(a-b)^c \neq a^c - b^c$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$

Os símbolos de $\neq$ e $\not\Rightarrow$ significam que, em geral, estas propriedades com $=$ e $\Rightarrow$ não são válidas, embora possam ser válidas nalguns casos particulares.

Sugestão: Acrescente a esta página todas as outras propriedades em que vai tendo dúvidas...

1. Qual o valor lógico das seguintes afirmações?

a) $\dfrac{x+5\cancel{\sqrt{2}}}{8\cancel{\sqrt{2}}}=\dfrac{x+5}{8}$

b) $\cancel{2}(1-x)=\cancel{2}x+\cancel{2}\Rightarrow\ 1-x=x+1$

c) $\cancel{8}x+\pi=\cancel{8}+x\ \Rightarrow\ x+\pi=1+x$

d) $\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{5}{x}-\dfrac{5}{2}$

e) $\sqrt{(-x)^2}=-x$

f) $\dfrac{2+\pi}{3}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\pi}{3}$

g) $\sqrt{(4-x^2)^2}=2-x$

h) $5+\cancel{\sqrt{2}}=\cancel{\sqrt{2}}(x-1)\Rightarrow\ 5=x-1$

i) $\dfrac{-x+6}{3x}=\dfrac{x-6}{-3x}$

j) $\cancel{2}+3x=\cancel{2}+\sqrt{5}\ \Rightarrow\ 3x=\sqrt{5}$

k) $\sqrt{7}x=0\ \Rightarrow\ x=0$

l) $x(x+1)^2=1\ \Rightarrow\ x=1\ \vee\ (x+1)^2=1$

m) $(\pi-x)(x+4)=7\ \Rightarrow\ (\pi-x)=7\ \wedge\ x+4=7$

n) $|x|<4\ \Rightarrow\ x<\pm 4$

o) $|x|\geq 2\ \Rightarrow\ x>\pm 2$

p) $|x|>5\ \Rightarrow\ x>5\ \vee\ x<-5$

q) $|x|<-4\ \Rightarrow\ x<\pm 4$

r) $|x|\geq 2\ \Rightarrow\ x\geq 2\vee x\leq -2$

s) $|x|<5\ \Rightarrow\ x<5\ \wedge\ x>-5$

2. Qual o valor lógico das seguintes afirmações?

a) $4^3.4^2 = 4^5$

b) $2^5.2^3 = 2^{10}$

c) $3^6.2^3 = 6^9$

d) $2^5.3^2 = 6^{10}$

e) $2^5 + 2^3 = 2^8$

f) $3^4 + 3^{-1} = 3^3$

g) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{-2}$

h) $\frac{2^7}{2^4} = 2^3$

i) $\frac{4^5}{4^4} = 4^{-1}$

j) $\frac{4^2}{4^6} = 4^3$

k) $\left(2^3\right)^4 = 8^4$

l) $\left(7^3\right)^2 = 7^6$

m) $(5x)^2 = 5x^2$

n) $(3x)^3 = 9x^3$

o) $(3 + x)^2 = 9 + x^2$

p) $(1 - x)^2 = 1 - x^2$

q) $\sqrt{x^2 + 9} = x + 3$

r) $\sqrt{x + 4} = \sqrt{x} + 2$

3. Se possível, simplifique as seguintes expressões.

a) $\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2 - x}$

b) $\dfrac{2(x^2+4)}{-7x+(x-4)^2}$

c) $\dfrac{2x^5 + \left(3x^2\right)^7}{5x^4}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+9}x + 2x}{x + \sqrt{3}x^2}$

e) $x - 1 + \dfrac{(x+1)^2 - \sqrt{8}x^2}{\sqrt{2}x}$

f) $\dfrac{\sqrt{2}x^2 - (4x^5)^2(x+1)}{\sqrt{2}x^4}$

4. Determine as soluções, em $\mathbb{R}$, de:

a) $\dfrac{(x-3)(x^2+4x-\sqrt{2})}{x^2+1}=0$

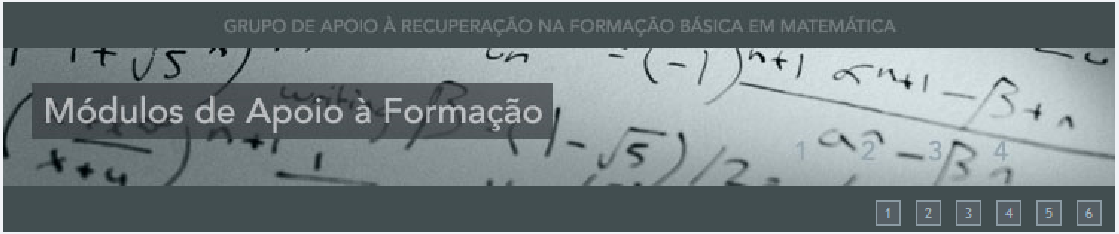
b) $2|x-5|+7=0$

c) $2|x-5|-7=0$

d) $|4-x|<3$

e) $\sqrt{(x-3)^2} > 5$

Se lhe parecer que necessita de praticar mais encontrará nestes sites um excelente apoio...



Para praticar... 1

1. Indique um racional e um irracional entre:
   a) 5.13434 e 5.134345;

   b) -4.7312121 e -4.7312121;

   c) 5.(12) e 5.(122).

2. Encontre um número racional positivo e um número irracional positivo ambos menores que 0.000001.

3. Prove cada uma das afirmações.

   a) Para a e b números reais positivos,
   $a < b \;\Leftrightarrow\; a^2 < b^2$.

   b) $a < b \;\Rightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$

4. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras para $a \leq b$.
   a) $a^2 \leq ab$
   b) $a - 3 \leq b - 3$
   c) $a^3 \leq a^2 b$
   d) $-a \leq -b$

5. Ordene $1, x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ para
   a) $x > 1$;
   b) $0 < x < 1$.

6. Resolva as inequações.

a) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$

b) $\dfrac{2x-5}{x-2} < 1$

c) $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$

d) $(x+1)(x-1)^2(x-3) \leq 0$

e) $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

f) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

g) $\dfrac{x+4}{x-3} \leq 0$

h) $\dfrac{3x-2}{x-1} \leq 0$

i) $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

j) $\dfrac{3}{x+5} > 2$

k) $\dfrac{x-2}{x+4} < 2$

l) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 1$

m) $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

n) $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

7. Indique o conjunto dos majorantes, dos minorantes, o ínfimo e o supremo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x - 5| < |2x + 4|\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} : \quad 5|2x| - |4x + 1| < |4 - x|\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad |5 + x^2| \geq 5\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad |4 - x^2| > |2x^2 - 1|\right\}$

8. Sendo ϵ um número real positivo, mostre que

$$|x-2| < \frac{\epsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \epsilon$$

9. Atendendo a que $\sum_{k=1}^{n} a^k = a\frac{1-a^k}{1-a}$, calcule:

a) $\sum_{k=1}^{10} 2^k + \sum_{k=3}^{6} (3 \times 5^k - 4^k)$

b) $\sum_{k=1}^{5} 3^{-k} + \sum_{k=2}^{5} (3 \times 2^{2k} - 5^k)$

10. A fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

dá a resistência total R, num circuito eléctrico, devido a três resistências R_1, R_2 e R_3, conectadas em paralelo.
Se $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$ e $30 \leq R_3 \leq 40$ encontre o conjunto de valores possíveis para R.

11. Um tanque cilíndrico de $500m^3$ tem um raio interno de $6m$. Qual deve ser a precisão da medição da altura h da água, para termos a certeza de que temos $500m^3$ de água com um erro inferior a 10%, isto é, com um erro inferior a $5m^3$?

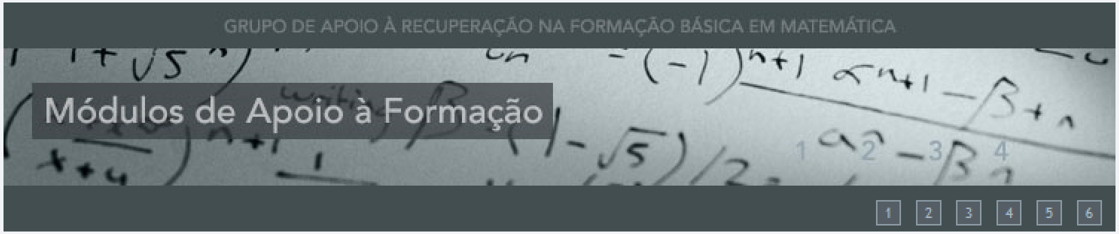
12. A temperatura em graus Celsius e Fahrenheit é relacionada pela fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Uma experiência requer que a temperatura seja mantida a 50°C com um erro, no máximo de 3% (ou 1.5°C). Se só dispõe de um termómetro em Fahrenheit, qual o erro permitido?

13. O raio de uma esfera é de cerca de 10m. Determine a tolerância δ na sua medição que garante um erro inferior a $0.01m^2$ no valor da área da superfície esférica.

Mais uma vez lhe lembramos,
se lhe parecer que necessita de praticar mais
encontrará nestes sites um excelente apoio...



Bibliografia

Bibliografia*

- José Alberto Rodrigues.
  Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
  Edições Colibri, 2007.
- Jaime Campos Ferreira.
  Elementos de lógica matemática e teoria dos conjuntos: Folhas do i.s.t.
  Available from
  `http://preprint.math.ist.utl.pt/preprints.pt.xml?serie=textos_didaticos`, 2001.
- Salas, Hille, and Etgen.
  Calculus: One variable.
  John Wiley Sons, Inc., 9th edition, 2003.
- Dale Varberg and Edwin J. Purcell.
  Calculus.
  Prentice-Hall, Inc., 7th edition, 1997.
- Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa.
  Teoria dos conjuntos: Folhas do i.s.t.
  Available from
  `http://preprint.math.ist.utl.pt/preprints.pt.xml?serie=textos_didaticos`, 2001.
- Bento de Jesus Caraça.
  Conceitos fundamentais da matemática.
  Tipografia matemática, Lda, 1st edition, 1951.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.

Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)