

Sandra Gaspar Martins
07/04/2011



Introdução



Neste capítulo vamos aprofundar o estudo de

sucessões

ou seja,

sequências de infinitos números reais...

como por exemplo:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

ou

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

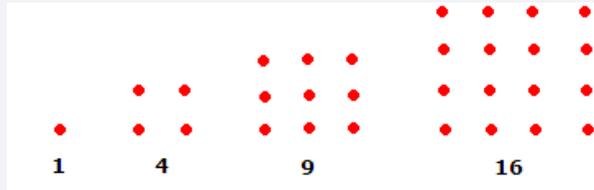
ou

$$0.1; 0.01; 0.001; 0.0001; 0.00001; \dots$$



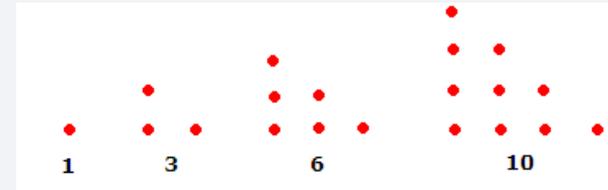
ou, a sucessão dos números quadrados

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...



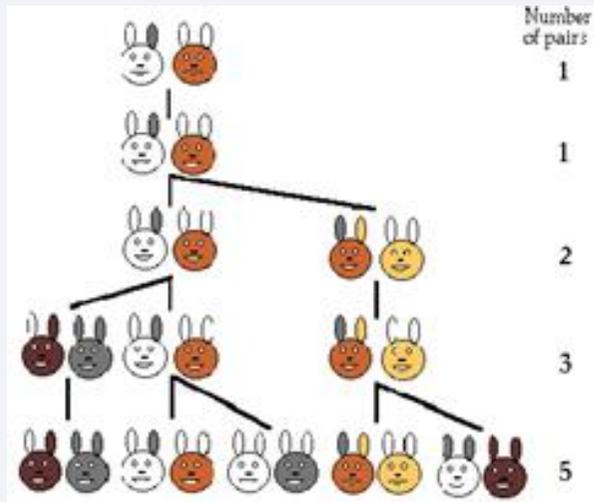
ou, a sucessão dos números triangulares

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...



ou, a sucessão de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...



Todas as figuras da página inicial estão relacionadas com a sucessão de Fibonacci ...

Esta sucessão aparece muito na Natureza: no número de folhas das plantas, no *olho* das flores, na formação das plantas, nos animais, nos humanos ...

O Homem desde há muito que ficou maravilhado com esta sucessão e a utilizou na Arquitectura, no Design, na Engenharia Civil ...

 : The Fibonacci Sequence

Fibonacci

(1170 -- 1250) Italiano



Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa - também conhecido como **Fibonacci** após a sua morte - foi um matemático italiano, dito como o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helénica. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da **sucessão de Fibonacci** e pelo seu papel na **introdução dos algarismos árabes na Europa**.

As aplicações das sucessões são infinitas:

Na Engenharia Civil:

- ▶ A sucessão do número de carros que passa a ponte Vasco da Gama em cada dia...
- ▶ A sucessão da quantidade máxima anual de litros de água na barragem de Castelo de Bode...

Na Economia:

- ▶ A sucessão dos valores da taxa anual de inflação...
- ▶ A sucessão do valor da amortização anual de um imóvel...
- ▶ A sucessão do volume de vendas anual da EPUL (Empresa Publica de Urbanização de Lisboa)...

Na Biologia:

- ▶ A sucessão do número de animais existentes de uma espécie em vias de extinção medido mensalmente...

Na Meteorologia:

- ▶ A sucessão da temperatura máxima no Aeroporto de Lisboa, dia após dia...

Na Medicina:

- ▶ A sucessão da quantidade de um medicamento existente no nosso corpo após cada toma...

...

estão sempre presentes no nosso dia-a-dia...

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- identificar sucessões em problemas;
- utilizar múltiplas representações de sucessões;
- estudar sucessões quanto à monotonia e limitação;
- encontrar exemplos de sucessões com determinadas propriedades;
- calcular limites de sucessões por definição;
- calcular limites de sucessões usando vários teoremas;
- reconhecer propriedades das sucessões, quer analiticamente, quer usando a representação gráfica, quer usando tabelas. Saber o que pode inferir rigorosamente de cada uma das representações;
- aplicar os conceitos estudados de modo a resolver problemas.

Competências globais

Também deve:

- escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- justificar os raciocínios;
- compreender e utilizar a linguagem matemática;
- utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (nestes, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- ▶ Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:^a
 - ▶ Gravação áudio
 - ▶ Caixa de texto
 - ▶ Sublinhar
 - ▶ Realçar
 - ▶ Chamada
 - ▶ Nuvem
 - ▶ Lápis
 - ▶ ...
- ▶ As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

^aSe não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em





Definição de sucessão



Um paciente toma uma cápsula com 30 mg de antibiótico.

Após 1 hora, a quantidade de antibiótico que ainda permanece no corpo é 90% da quantidade no início dessa hora.

Seja h o número de horas decorridas desde a toma da cápsula.

1. Qual é a quantidade de antibiótico na hora $h = 0$?

2. E na hora $h = 1$?

3. E $h = 2$?

4. E $h = 3$?

5. Escreva uma expressão matemática que indique a quantidade de antibiótico ao fim de qualquer número h de horas.

7. Abra o ficheiro: *Antibiotico.xls*.
8. Copie para esta página o gráfico.



9. Copie para esta *caixa de texto* a tabela.

10. A partir de quando é que o paciente tem menos 1 mg no sangue?



Definição de sucessão

Uma **sucessão** (numérica) é uma lista ordenada de infinitos números reais,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

u_1 – primeiro termo

u_2 – segundo termo

u_3 – terceiro termo

⋮

u_n – n-ésimo termo ou **termo geral**

⋮

Quando existe termo geral, representa-se a sucessão por

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Note que:

- ▶ Por exemplo, u_{10} chama-se o 10º termo, ou o termo de **índice** 10, ou o termo de **ordem** 10...
- ▶ Em geral $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $n = 1, 2, 3, \dots$ mas pode começar em 0, em 10, em -1, etc, o índice serve apenas para indicar a ordem dos termos...
- ▶ Por abuso de linguagem, diz-se, por vezes, a sucessão u_n em vez de a sucessão de termo geral u_n .
- ▶ Uma sucessão também pode ser vista como uma função real de variável natural,

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow u(n) = u_n \end{aligned}$$

Por exemplo, à sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ corresponde a função $f(n) = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$.



1. Escreva alguns termos da sucessão

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

2. Considere a sucessão dada pelo termo geral:

$$u_n = \frac{1}{n+5}$$

Calcule:

a) u_1

b) u_3

c) u_7

d) u_{10}

e) u_{21}



3. Considere a sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$$

Calcule:

a) u_1

b) u_3

c) u_7

d) u_{10}

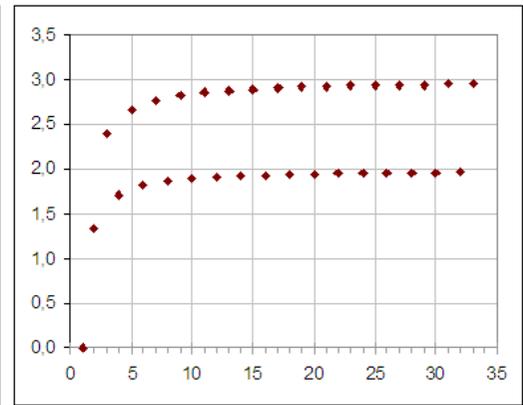
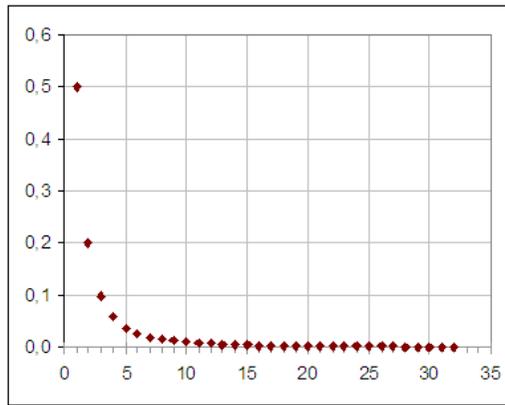
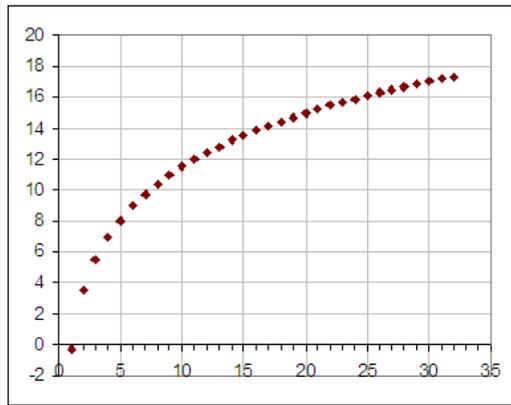
e) u_n (Sem ser por recorrência.)

Nota: Nesta sucessão conseguimos facilmente calcular o termo geral mas isso nem sempre acontece!



Monotonia

Repare nos seguintes gráficos (de alguns termos de sucessões)...



eles sugerem-nos que os valores dos termos das sucessões podem crescer, decrescer ou não serem *monótonos*...

Vamos definir rigorosamente estes conceitos...

Definições

A sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é

- ▶ **crescente** se $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **decrescente** se $u_n > u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **monótona** se é crescente ou decrescente.
- ▶ **estritamente crescente** se $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **estritamente decrescente** se $u_n > u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **estritamente monótona** se é estritamente crescente ou estritamente decrescente.
- ▶ **limitada** se $\exists m, n \in \mathbb{R} : n \leq u_n \leq m$,
ou equivalentemente,
se $\exists M \in \mathbb{R}^+ : |u_n| \leq M$.

Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Cada uma das páginas desta aula é dedicada a um tópico da *Monotonia.xls*.
 - a) Comece por ler a primeira página o gráfico (Crie os gráficos).
 - b) Indique, se possível, para cada uma das sucessões se é crescente ou decrescente.
 - c) Confirme a monotonia de cada uma das sucessões anteriores.

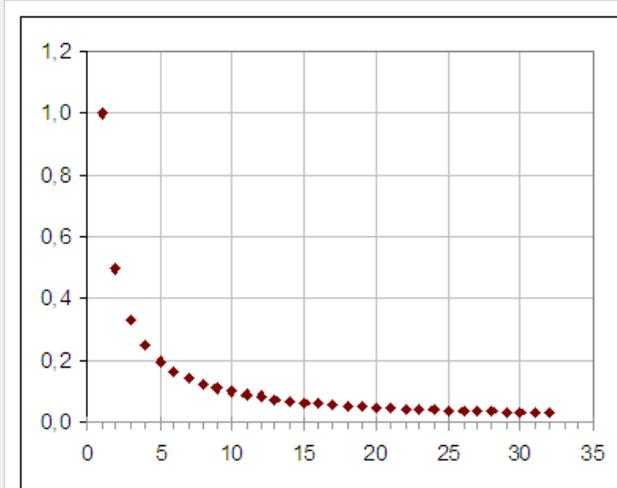
Exemplo:

$$u_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tabela:

n	1/n
1	1,0000
2	0,5000
3	0,3333
4	0,2500
5	0,2000
6	0,1667
7	0,1429
8	0,1250
9	0,1111
10	0,1000
11	0,0909
12	0,0833
13	0,0769
14	0,0714
15	0,0667
16	0,0625
17	0,0588
18	0,0556
19	0,0526
20	0,0500
21	0,0476
22	0,0455
23	0,0435
24	0,0417
25	0,0400
26	0,0385
27	0,0370
28	0,0357
29	0,0345
30	0,0333
31	0,0323

Gráfico:



Analisando a tabela e o gráfico a sucessão “parece” monótona?

Pelo gráfico e pela tabela, a sucessão é monótona decrescente entre a ordem $n = 1$ e $n = 32$.

Analicamente:

Confirmemos que u_n é decrescente.

Ou seja, que

$$u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

*(será que esta desigualdade é verdadeira?)
(como $n + 1$ é sempre positivo...)*

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \geq 1$$

(como n é sempre positivo...)

$$\Leftrightarrow n + 1 \geq n.$$

Portanto temos, $n + 1 \geq n$.

E esta desigualdade é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Logo a sucessão é decrescente!

Conclusão:

A sucessão é decrescente!

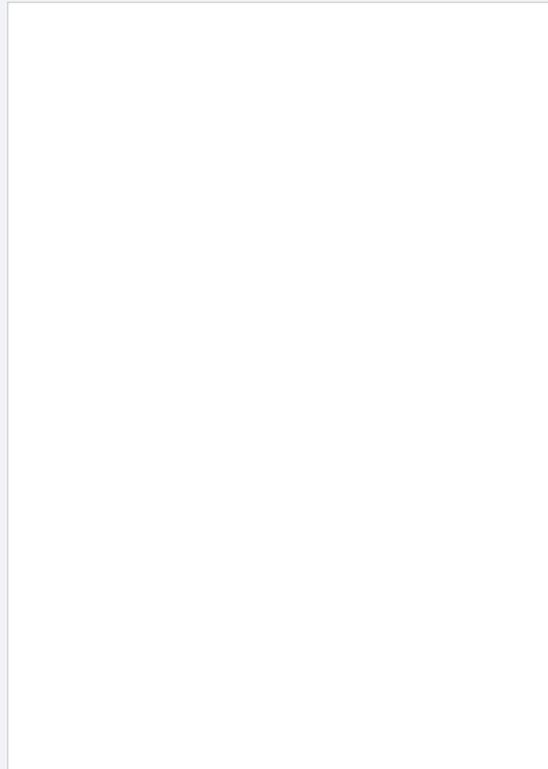


$$u_t = \frac{1}{t^2 + 1} \quad (t \in \mathbb{N})$$

Gráfico:

Analiticamente:

Tabela:



Analisando a tabela e o gráfico a sucessão “parece” monótona?

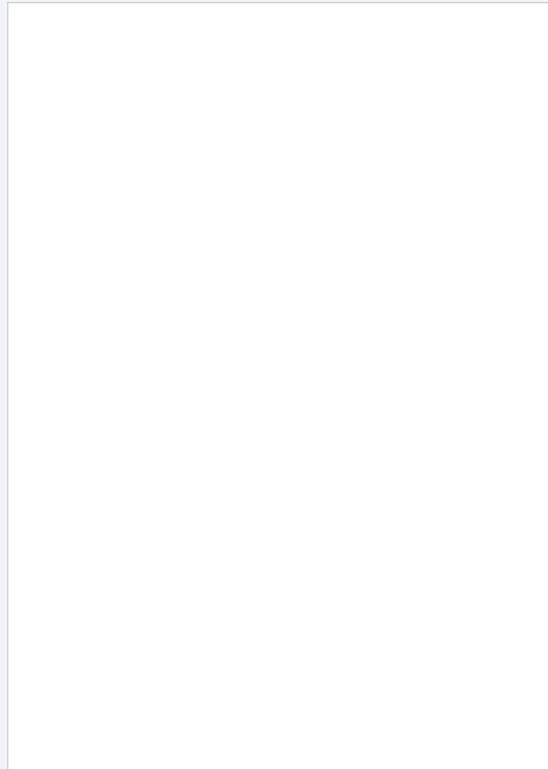
Conclusão:

$$v_n = \ln\left(n^5 - \frac{1}{4}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Gráfico:

Analiticamente:

Tabela:



Empty area for analytical reasoning.

Analisando a tabela e o gráfico a função “parece” monótona?

Conclusão:

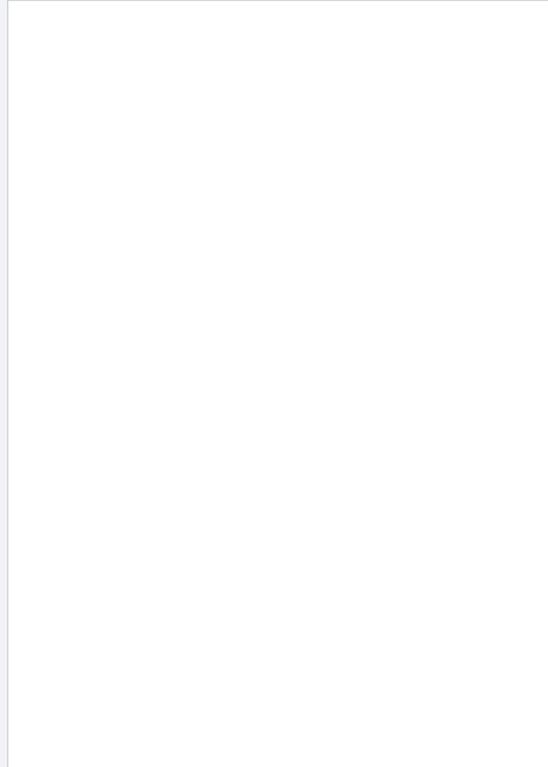


$$w_p = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \quad (p \in \mathbb{N})$$

Gráfico:

Analiticamente:

Tabela:



Analisando a tabela e o gráfico a sucessão “parece” monótona?

Conclusão:

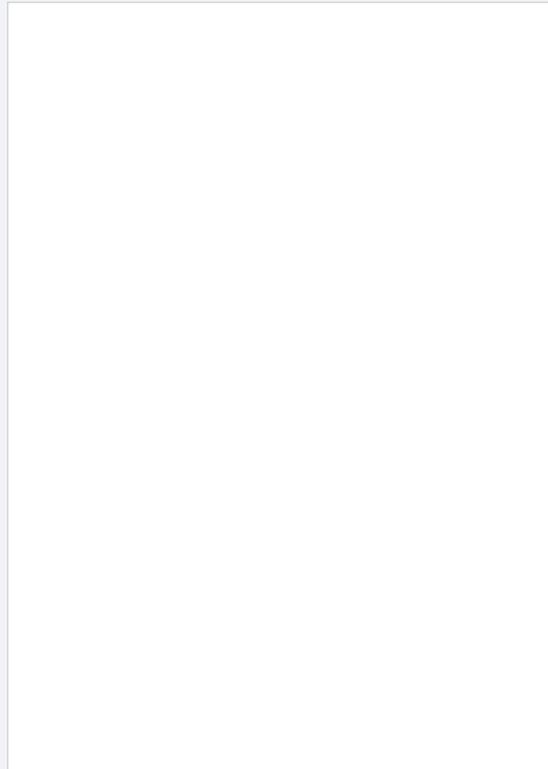


$$x_k = (-1)^k \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Gráfico:

Analiticamente:

Tabela:



Analisando a tabela e o gráfico a sucessão “parece” monótona?

Conclusão:

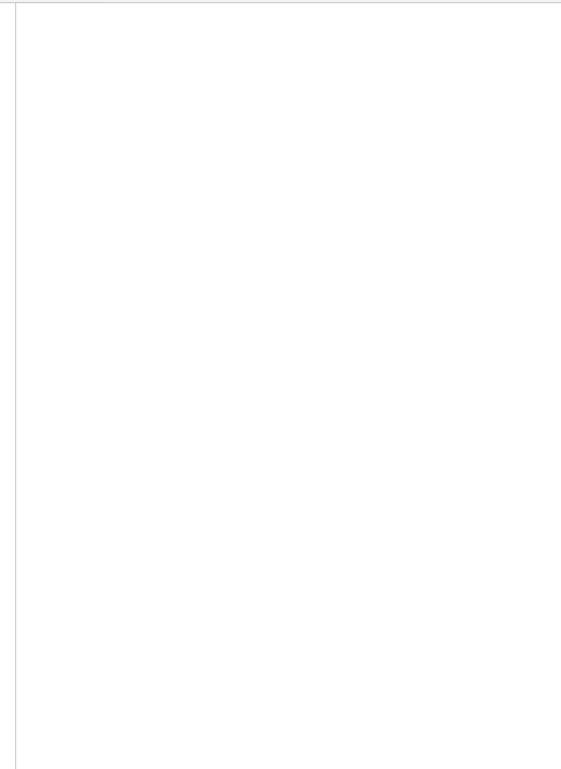
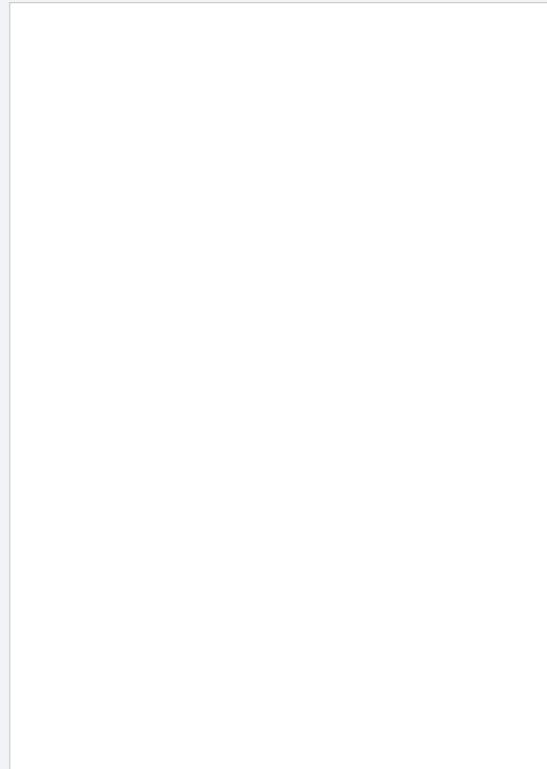


$$y_m = m^2 - 10^2m + 2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

Gráfico:

Analiticamente:

Tabela:



Analisando a tabela e o gráfico a sucessão “parece” monótona?

Conclusão:



2. Será que utilizando uma folha de cálculo é possível "garantir" que uma sucessão é, de facto, monótona? Fundamente a resposta.
Se preferir, pode responder utilizando a *Ferramenta de Comentários: Gravação Audio*.

3. Indique um exemplo, distinto dos anteriores, de cada um dos seguintes tipos de sucessão:

a) crescente;

b) decrescente;

c) crescente mas não estritamente crescente;

d) limitada;

e) monótona limitada;

f) monótona não limitada;

g) não monótona e limitada;

h) não monótona e não limitada.



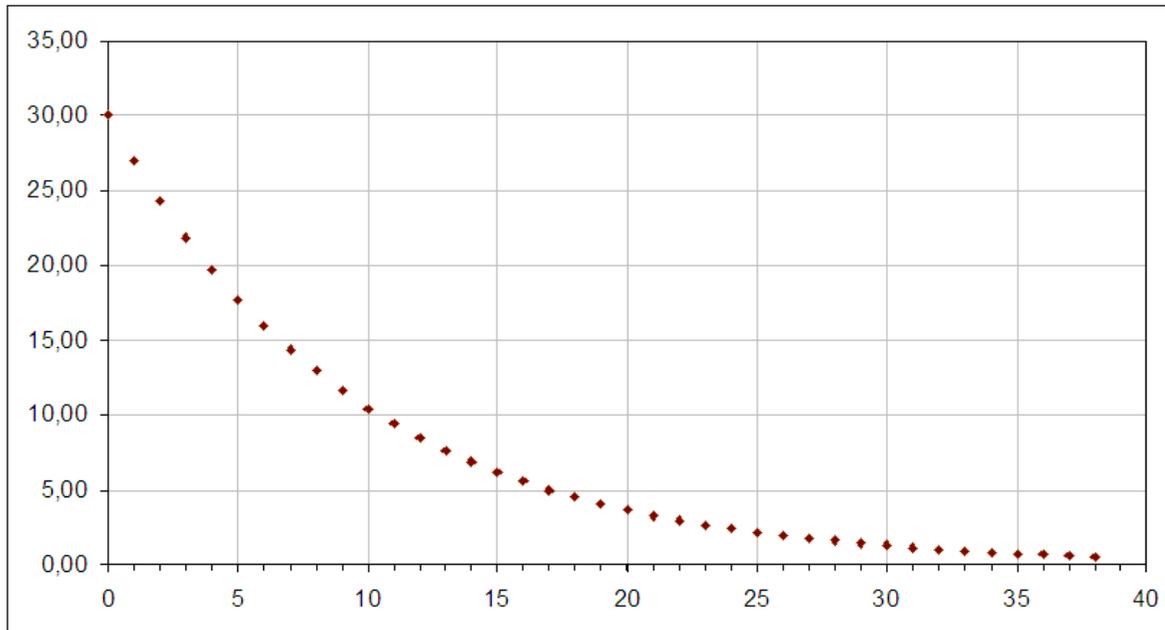
Infinitésimo

Voltemos ao problema do antibiótico.



Um paciente toma uma cápsula com 30 mg de antibiótico. Após 1 hora, a quantidade de antibiótico que ainda permanece no corpo é 90% da quantidade no início dessa hora.

No início deste capítulo já deve ter concluído que este problema nos leva à sucessão $A_h = 30 \left(\frac{90}{100}\right)^h$ cujo gráfico é:



1. Volte a abrir o ficheiro:

Antibiotico.xls.

- a) A partir de que hora é que a quantidade de antibiótico no corpo é inferior a 0.1 mg?
- b) E inferior a 0.05 mg?
- c) E a uma centésima de miligrama?

d) E a uma milésima de miligrama?

e) Esta quantidade é tão pequena quanto se quiser?

Quando os termos de uma sucessão são ***tão pequenos quanto se quiser***, esta sucessão diz-se um **infinitésimo**.

Definição de infinitésimo

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitésimo** (ou, **tem limite 0**)

se, para cada número real positivo δ , existe uma ordem p , a partir da qual, a sucessão (em valor absoluto) é menor que esse número δ :

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow |u_n| < \delta.$$

Neste caso, utilizamos uma das notações:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,$$

$$\lim_n u_n = 0,$$

$$u_n \xrightarrow[n]{} 0.$$

Isto significa, em linguagem corrente, que a sucessão é **tão pequena quanto se quiser**.

1. Considere a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$.
 - a) Dado $\delta = \frac{1}{10}$ determine uma ordem p a partir da qual a sucessão é menor que δ .
 - b) E para $\delta = \frac{1}{100}$?
 - c) E para um número real positivo qualquer, δ ?
 - d) Esta sucessão é um infinitésimo?



2. Considere a sucessão $u_n = \frac{4}{n+1}$.

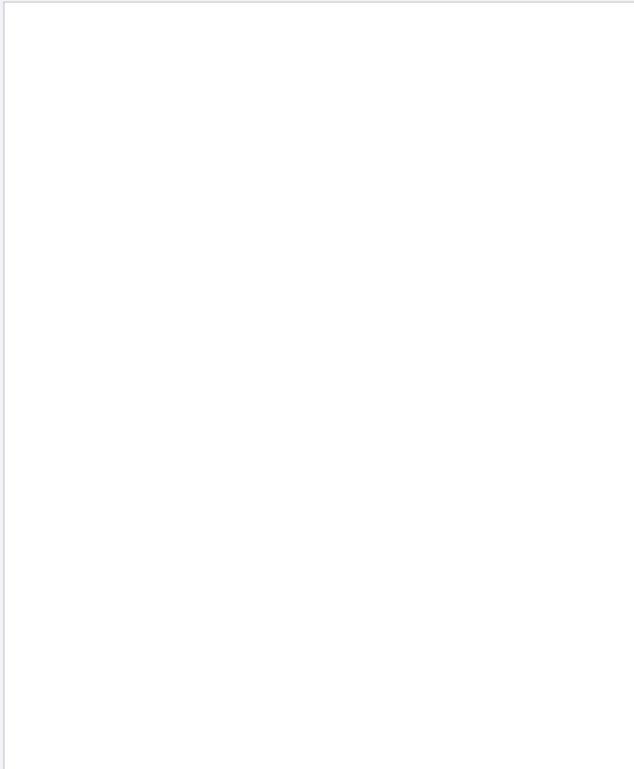
- a) Determine uma ordem p a partir da qual a sucessão é menor que três décimas.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to part (a).

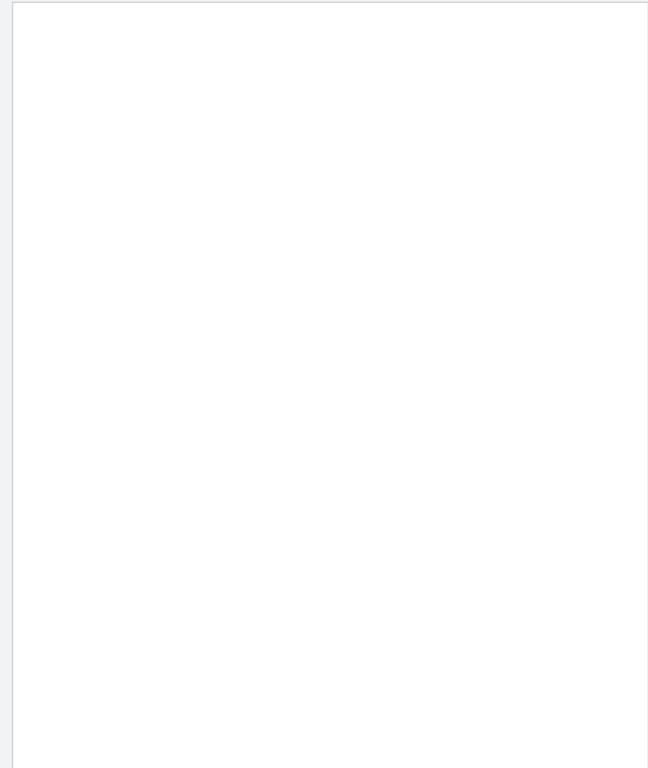
- b) E menor que 8 milésimas ?

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to part (b).

c) E menor que um número real positivo qualquer, δ ?



d) Esta sucessão é um infinitésimo?



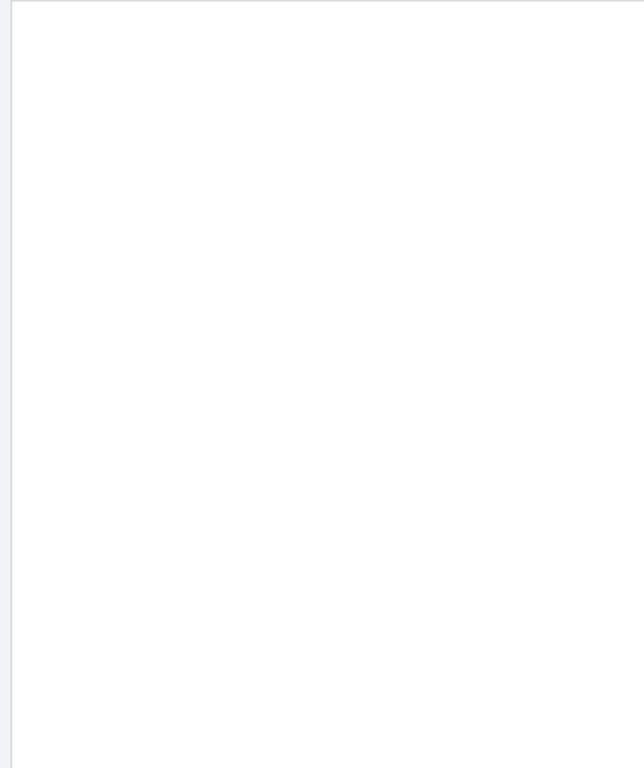


3. Usando a definição, averigúe se são infinitésimos:

a) $u_n = (-1)^n \frac{1}{n^2 - 5}$

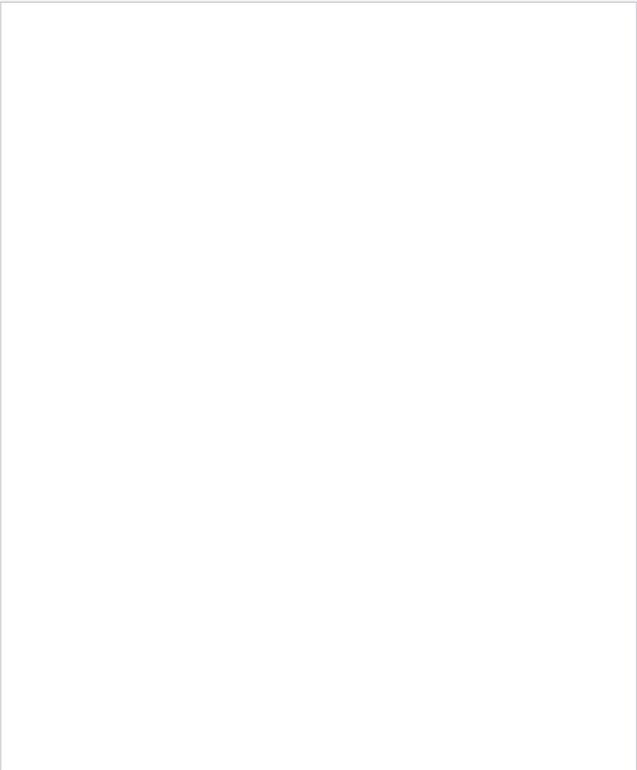


b) $v_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 2}$





c) $w_m = \frac{1}{m} \frac{1}{(m+1)^4}$

A large, empty rectangular box is provided for the student to write their solution for part c. It occupies the left half of the page below the equation.

d) $x_k = 4k + 2.$

A large, empty rectangular box is provided for the student to write their solution for part d. It occupies the right half of the page below the equation.

4. Abra o ficheiro: *ExemplosInfinitesimos.xls*.
Considere as sucessões

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n + \sqrt{n^3}}$$

e

$$v_t = \frac{t^2 + 10^4}{10^6 t}.$$

- a) Para cada uma das sucessões, averigúe se existe uma ordem, a partir da qual essa sucessão é inferior a uma milésima.

u_n

v_n

- b) É inferior a $\frac{7}{10000}$?

u_n

v_n

Justifique cuidadosamente.



Infinitamente grande



Definição de infinitamente grande

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande** (ou, **tem limite infinito**)

se, para cada número real positivo L , existe uma ordem p , a partir da qual a sucessão (em valor absoluto) é maior que esse número L :

$$\forall L > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow |u_n| > L.$$

Neste caso, utilizamos uma das notações:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty,$$

$$\lim_n u_n = \infty,$$

$$u_n \xrightarrow[n]{} \infty.$$

Isto significa, em linguagem corrente, que a sucessão é **tão grande quanto se quiser**.

1. Considere a sucessão $u_n = n^2$.
 - a) Dado $L = 8$ determine uma ordem p a partir da qual a sucessão é maior que L .
 - b) E para $L = 100$?
 - c) E para um número real positivo qualquer, L ?
 - d) Esta sucessão é um infinitamente grande?



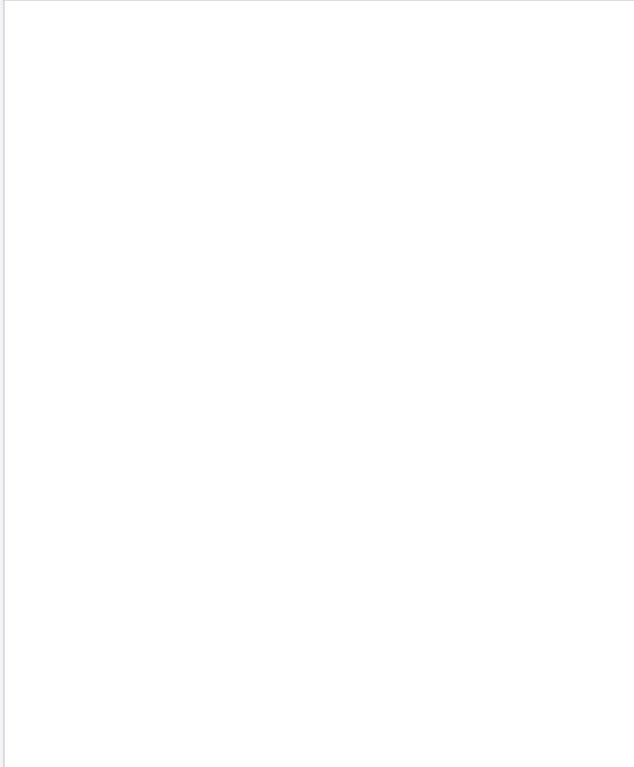
2. Averigúe se são infinitamente grandes:

a) $u_n = (-1)^n (n^2 - 5)$

b) $v_k = -k(k + 3)^4$



c) $y_m = \frac{3}{m+5}$



3. Utilize uma folha de cálculo  para determinar a ordem a partir da qual a sucessão $u_n = n^5 + 2n + \sqrt{n^7}$ é superior a mil.

E superior a um milhão?

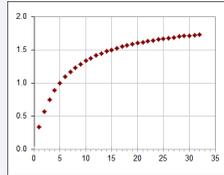
Justifique cuidadosamente.



Limites importantes

Vamos olhar com cuidado para a sucessão:

$$u_n = \frac{2n + 1}{n + 5}$$



$$n = 1 \quad \frac{3}{6} \approx$$

$$n = 10 \quad \frac{21}{16} \approx$$

$$n = 100 \quad \frac{201}{105} \approx$$

$$n = 1\,000 \quad \frac{2\,001}{1\,005} \approx$$

$$n = 10\,000 \quad \frac{20\,001}{10\,005} \approx$$

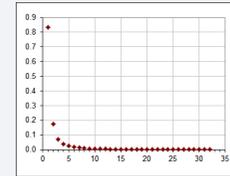
$$n = 100\,000 \quad \frac{200\,001}{100\,005} \approx$$

$$n = 1\,000\,000 \quad \frac{2\,000\,001}{1\,000\,005} \approx$$

É óbvio que esta sucessão está **tão perto quanto se quiser de** .

E agora para a sucessão:

$$v_n = \frac{3n^2 + 2}{5n^4 + 1}$$



$$n = 1 \quad \frac{5}{6} \approx$$

$$n = 10 \quad \frac{302}{50\,001} \approx \frac{300}{50\,000} = \frac{3}{500} \approx$$

$$n = 100 \quad \frac{30\,002}{500\,000\,001} \approx \frac{3}{50\,000} \approx$$

$$n = 1\,000 \quad \frac{3\,000\,002}{5\,000\,000\,000\,001} \approx$$

$$n = 10\,000 \quad \frac{300\,000\,002}{50\,000\,000\,000\,000\,001} \approx$$

$$n = 100\,000 \quad \dots$$

É óbvio que esta sucessão está **tão perto quanto se quiser de** .

**Limites de quocientes de polinómios**

- ▶ Grau maior no numerador $\rightarrow \infty$.
- ▶ Grau maior no denominador $\rightarrow 0$.
- ▶ Grau igual \rightarrow quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

Exemplos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n + 5} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 2}{5n^4 + 1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 + 1}{3n^2 + 2} = +\infty$$

Use o resultado anterior para escrever os seguintes limites.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 2n + 1}{n^3 + 5n^2} =$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 + 5n^2} =$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4 + 2n + 1}{2n^4 + 5n^2} =$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2n^5 + 1}{n^3 - 5n^7} =$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^4 + n^6 + 1}{n^3 - n^6} =$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - n}{n + 2} =$$



$$10^1 =$$

$$10^2 =$$

$$10^3 =$$

$$10^4 =$$

$$10^5 =$$

⋮

$$10^{10} =$$

⋮

$$10^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n =$$

$$1^1 =$$

$$1^2 =$$

$$1^3 =$$

$$1^4 =$$

$$1^5 =$$

⋮

$$1^{10} =$$

⋮

$$1^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1 =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^5 =$$

⋮

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{10} =$$

⋮

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n =$$



$$\left(-\frac{1}{10}\right)^1 =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^2 =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^3 =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^4 =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^5 =$$

⋮

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{10} =$$

⋮

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^n =$$

$$(-1)^1 =$$

$$(-1)^2 =$$

$$(-1)^3 =$$

$$(-1)^4 =$$

$$(-1)^5 =$$

⋮

$$(-1)^{10} =$$

⋮

$$(-1)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n =$$

$$(-10)^1 =$$

$$(-10)^2 =$$

$$(-10)^3 =$$

$$(-10)^4 =$$

$$(-10)^5 =$$

⋮

$$(-10)^{10} =$$

⋮

$$(-10)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-10)^n =$$



$$\left(\frac{2}{5}\right)^1 =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 =$$

⋮

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{10} =$$

⋮

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^1 =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 =$$

⋮

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{10} =$$

⋮

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{100} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n =$$



Tendo em conta os exemplos das páginas anteriores, sistematize o quadro seguinte.

Limite da exponencial

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \left\{ \begin{array}{l} \text{se} \\ \text{se} \\ \text{se} \\ \text{se} \\ \text{se} \\ \text{se} \\ \text{se} \end{array} \right.$$

Confirmei no livro as minhas respostas.

Use o quadro

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n =$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n =$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{9} \right)^n =$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n =$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,5)^n =$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-10)^n =$
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3} =$



Limite finito

Definição de limite finito

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
tende para o número $a \in \mathbb{R}$

(ou **tem limite** $a \in \mathbb{R}$)

se $u_n - a$ é um infinitésimo, ou seja,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Neste caso, utilizamos uma das notações:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a,$$

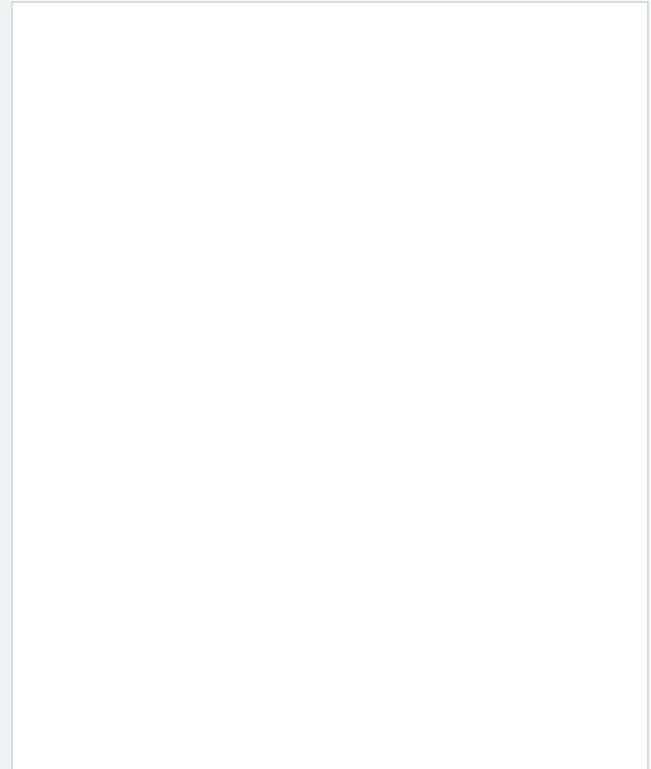
$$\lim_n u_n = a,$$

$$u_n \xrightarrow[n]{} a.$$

1. Considere a sucessão $u_n = \frac{n}{n+1}$.

a) Qual lhe parece ser o limite, a , desta sucessão?

b) Dado $\delta = \frac{1}{10}$, determine uma ordem p , a partir da qual a sucessão está a uma distância de a , menor que δ .





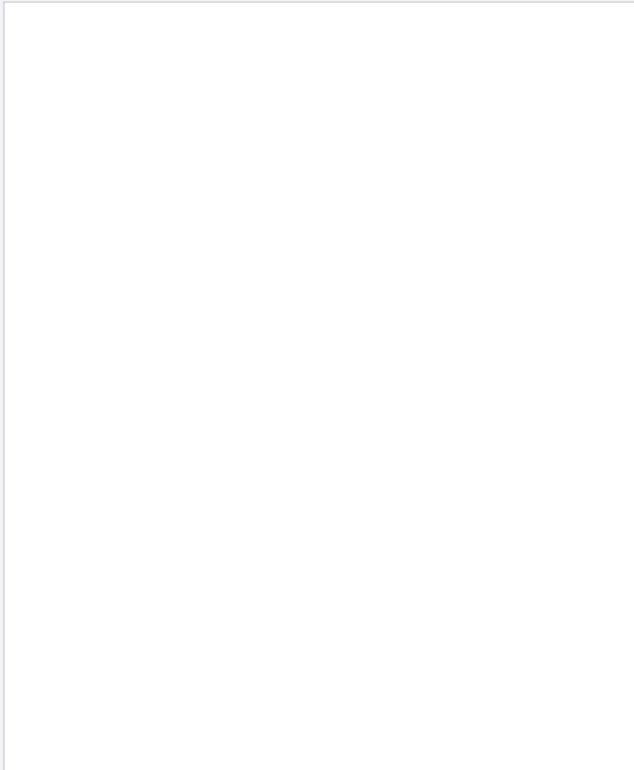
c) E para $\delta = \frac{1}{1000}$?

A large, empty rectangular box intended for the student's answer to question c).

d) E para um número real positivo qualquer, δ ?

A large, empty rectangular box intended for the student's answer to question d).

- e) Prove, por definição, que esta sucessão tende, de facto, para a .



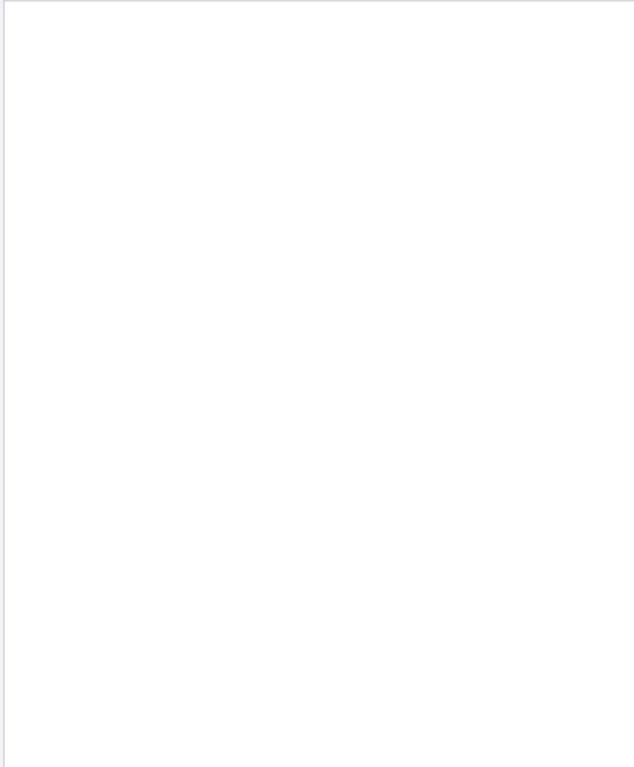


2. Consegue prever quais são os limites das sucessões seguintes? Confirme, por definição, a sua previsão.

a) $u_n = \frac{4n + 3}{2n - 1}$

b) $v_p = \frac{\sqrt{p} + 1}{3\sqrt{p}}$

3. Usando uma folha de cálculo , calcule 100 termos da sucessão $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Consegue prever qual o seu limite?

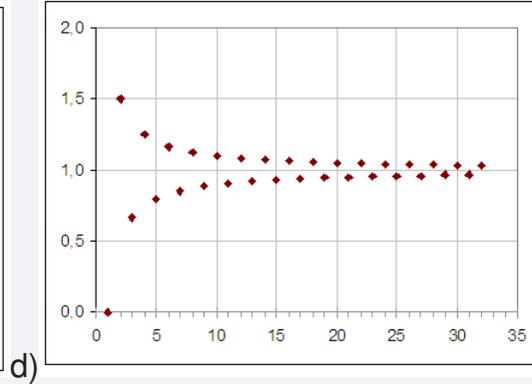
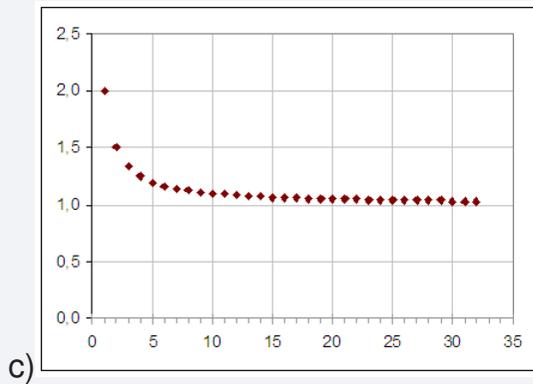
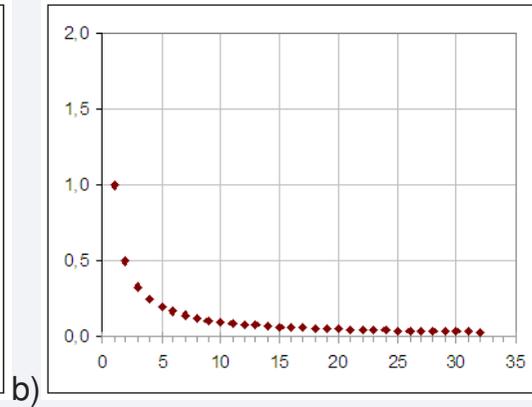
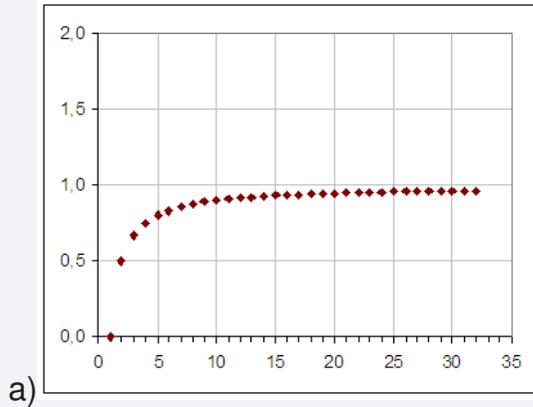


Copie para esta página a tabela/gráfico que utilizou para fazer a previsão.
Mais tarde veremos rigorosamente...



Para praticar... 1

1. Associe os gráficos aos termos gerais das sucessões:



1.1 $u_n = 1/n$

1.2 $u_n = 1 - 1/n$

1.3 $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

1.4 $u_n = 1 + 1/n$

2. Associe as representações aos termos gerais das sucessões:

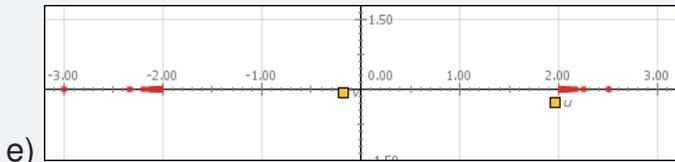
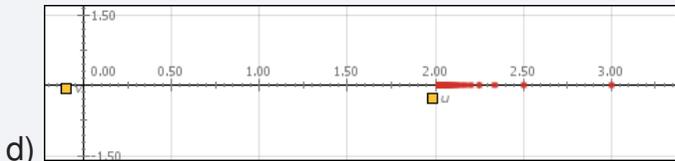
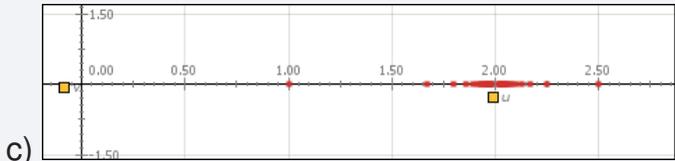
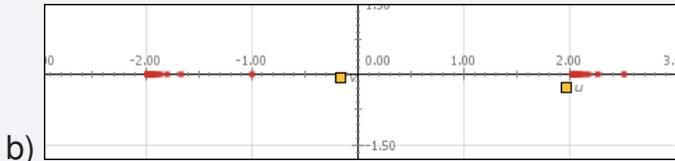
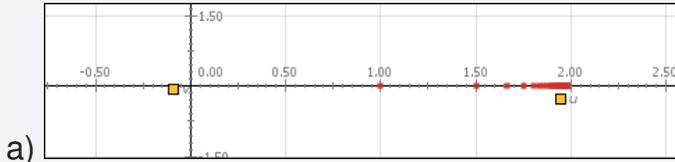
2.1 $u_n = 2 + 1/n$

2.2 $u_n = 2 + (-1)^n/n$

2.3 $u_n = 2(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

2.4 $u_n = 2 - 1/n$

2.5 $u_n = 2(-1)^n + 1/n$



Pressione as figuras para ver as animações...



3. Seja V_n o número de viaturas que atravessam a ponte Vasco da Gama no mês n , sendo $n=1$ o mês de Janeiro de 2000. Em termos de viaturas, o que representa cada uma das expressões:

a) V_8

b) $V_n - V_{n-1}$

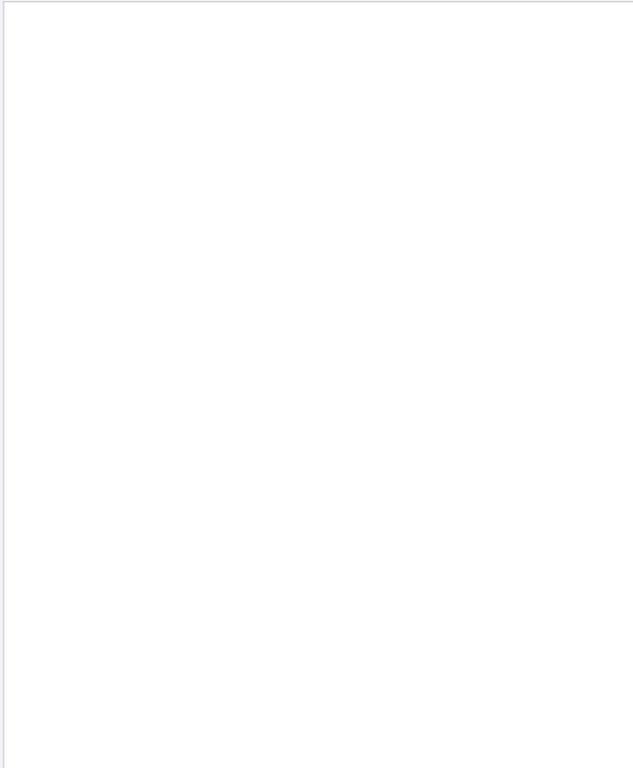
c) $\sum_{i=1}^{12} V_i$



4. Sabemos que $u_n = n^2 + 5$ é um infinitamente grande portanto

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies |n^2 + 5| > L.$$

Determine o valor de p no caso em que $L=100$,
 $L=1000$, $L=1$ e no caso geral em que L é um número real qualquer.





5. Determine a ordem a partir da qual a sucessão

$$a_n = \frac{1}{2n^4 + 3} \text{ é inferior a 3 milésimas.}$$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the problem.



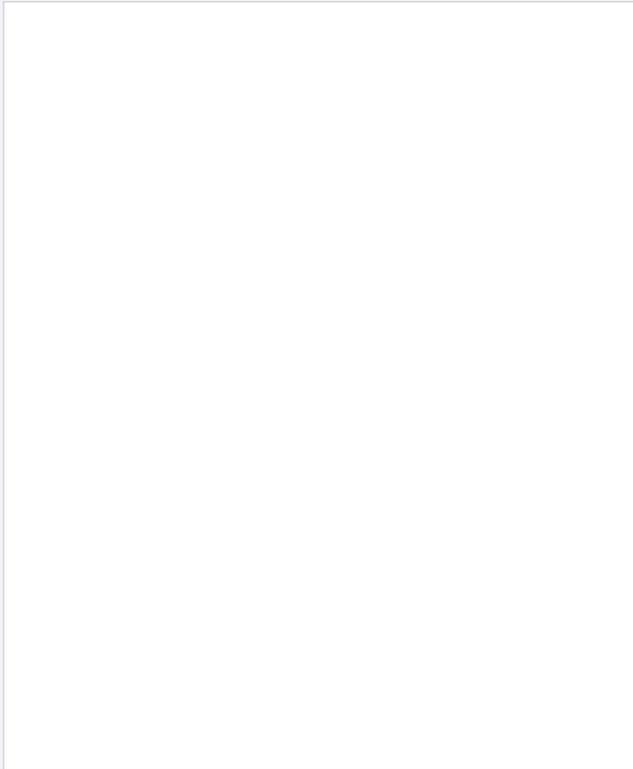
6. Mostre, por definição, que são infinitésimos as sucessões de termo geral

a) $u_n = \frac{-2}{n^2 + 4}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their proof showing that the sequence $u_n = \frac{-2}{n^2 + 4}$ is infinitesimal.

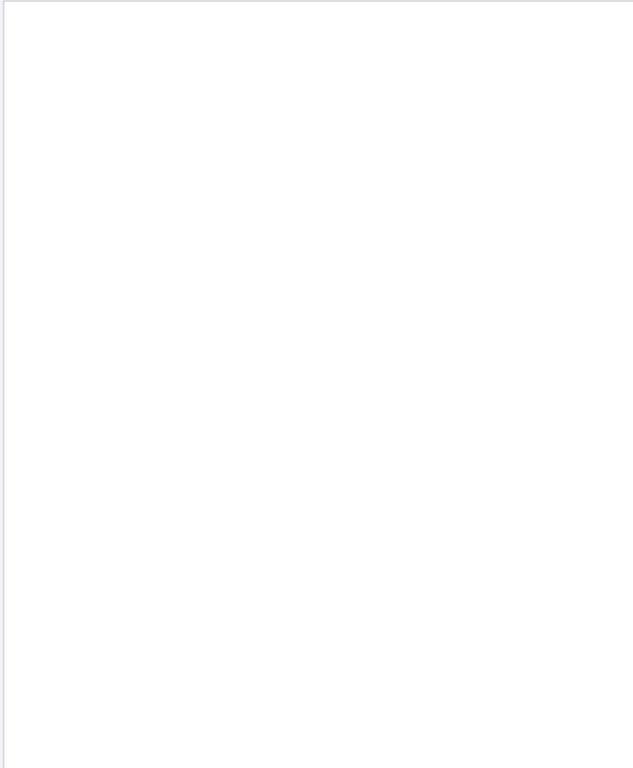


b) $a_n = \frac{2}{(n-2)^2}$



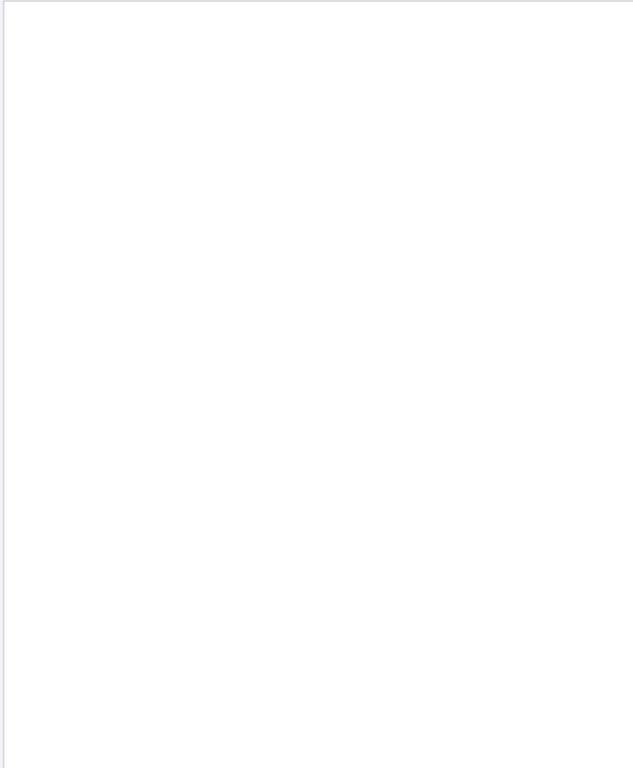


c) $b_k = \frac{-1}{k^5 + 3}$



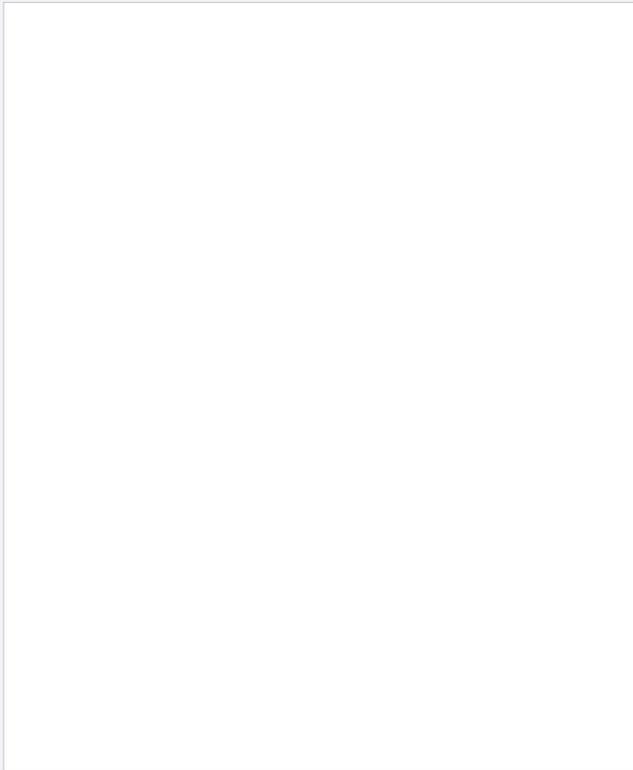


d) $c_n = \frac{2}{n^2 - 6}$



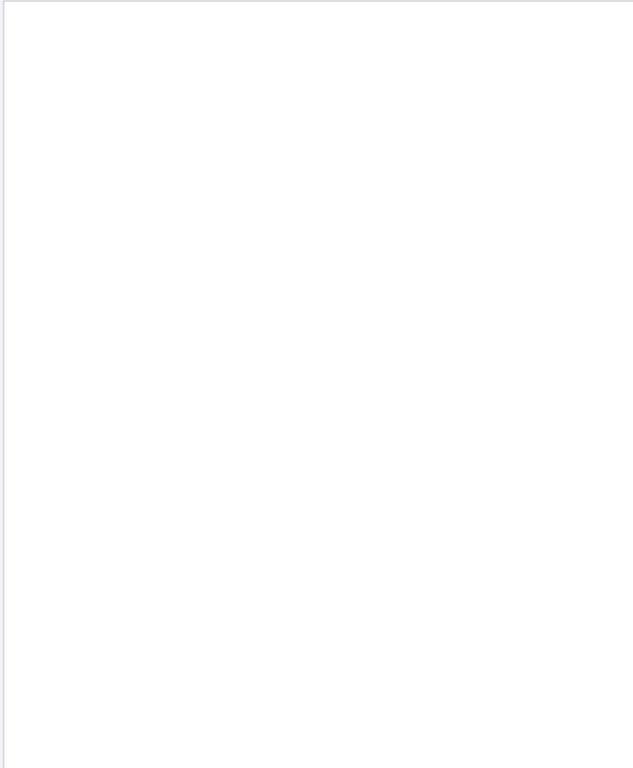


e) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2}$





f) $u_n = \frac{-2}{n^2 + 4}$





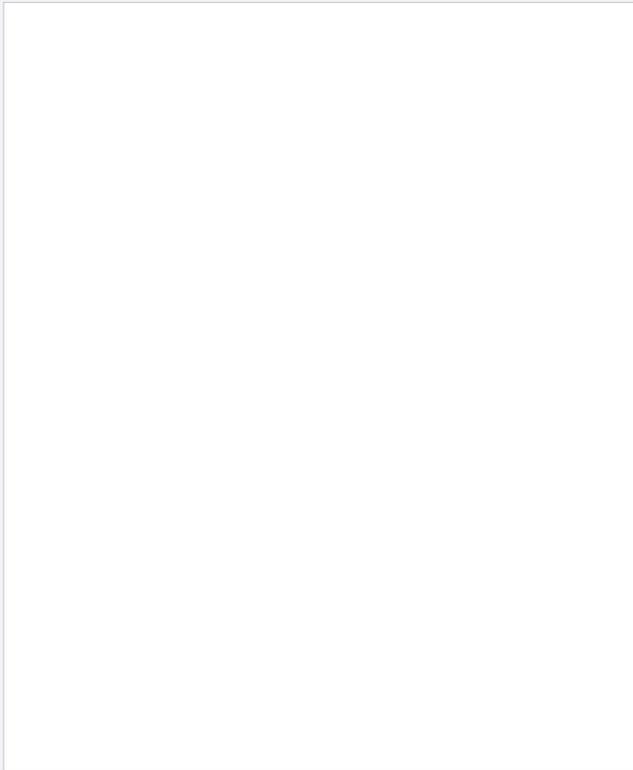
7. Mostre, por definição, quais os limites das sucessões:

a) $u_n = \frac{2n}{n+3}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the problem.

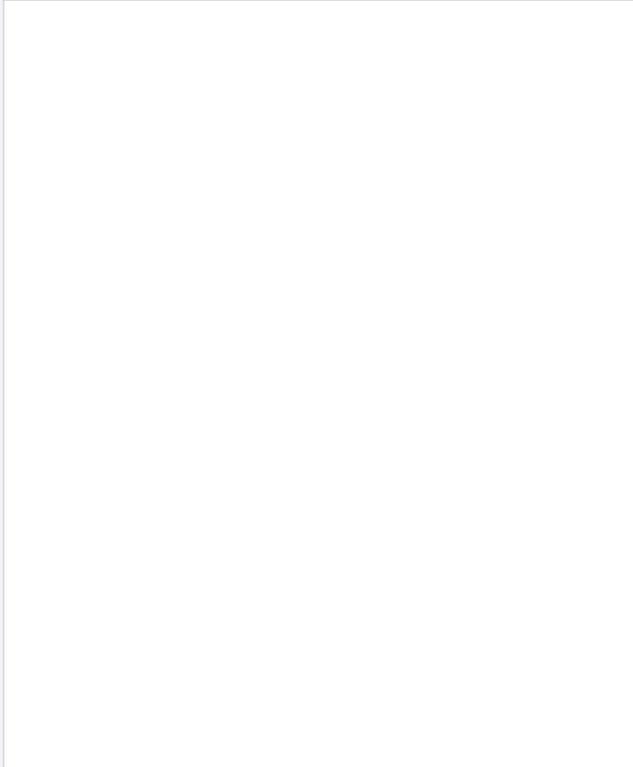


b) $a_n = n^2$



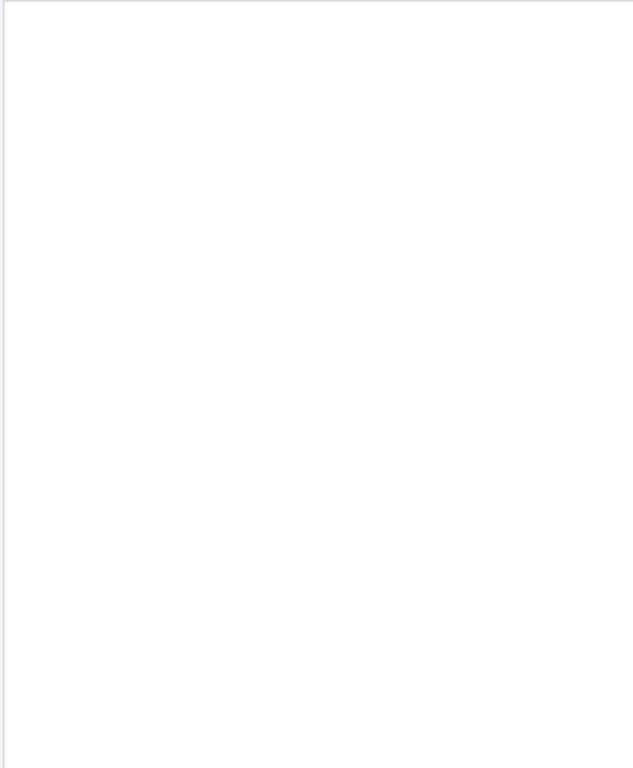


c) $b_k = \frac{-1}{k^3 + 1}$





d) $c_n = \frac{5n^2}{2 - n^2}$





Teoremas

Teorema da unicidade do limite

Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não pode tender para dois limites diferentes,

ou seja,

se $\lim_n u_n = a$ e $\lim_n u_n = b$ então $a = b$.

Propriedades algébricas dos limites finitos

Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são duas sucessões convergentes, então temos que

$$1. \lim_n (u_n + v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n;$$

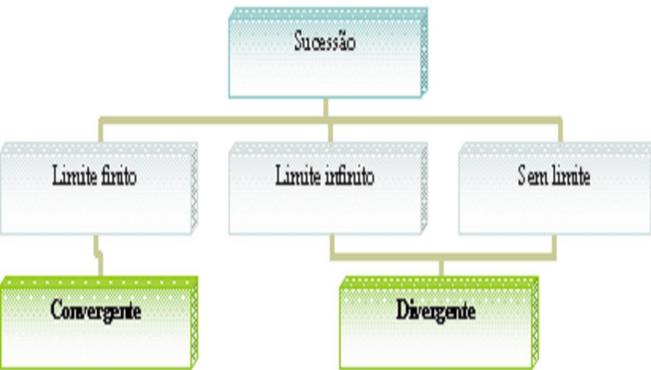
$$2. \lim_n (\lambda u_n) = \lambda \lim_n u_n, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$3. \lim_n (u_n \cdot v_n) = \lim_n u_n \times \lim_n v_n;$$

$$4. \lim_n \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}, \quad \lim_n v_n \neq 0, \quad v_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$5. \lim_n (u_n)^p = \left(\lim_n u_n \right)^p, \quad p \in \mathbb{N};$$

$$6. \lim_n \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim_n u_n}, \quad p \in \mathbb{N}.$$



Indique exemplos dos 3 tipos de sucessões:

Teorema

- ▶ Uma sucessão monótona e limitada .
- ▶ Uma sucessão monótona e não limitada .

Confirmei no livro as minhas respostas.

José Anastácio da Cunha

(1744—1787) Português



J. A. da Cunha teve ascendência humilde, foi educado num Convento onde aprendeu Gramática, Retórica e Lógica. Quanto a **Física e Matemática foi autodidacta**.

Em 1777 foi **acusado pela Inquisição**, de se ter relacionado com camaradas militares protestantes ingleses, de ter lido Voltaire, Rousseau, Hobbes e outros autores que defendiam o deísmo, indiferentismo e tolerantismo e de ter emprestado a uma sua discípula livros que estavam impregnados de “filosofismo”.

Foi acusado de comer carne em dias proibidos, de manter em sua casa uma manceba, de assistir com pouca reverência na igreja e de dispensar os preceitos da mesma. Foi condenado a reclusão por 3 anos na Casa das Necess. da Cong. do Oratório de Lx, seguindo de 4 anos de degredo para Évora e ficou ainda interdito de entrar em Coimbra e em Valença.

A sua obra mais relevante os **Princípios Mathematicos** revela uma criatividade assinalável e os seus grandes conhecimentos. Aqui ele reformula a Geometria de Euclides. **Cunha terá precedido Cauchy na apresentação clara da noção de infinito e de infinitésimo**. Infelizmente não se conhece o seu manuscrito intitulado *Sobre o infinito matemático*, que não chegou a ser publicado e se perdeu. No que se refere à teoria das séries, precede os trabalhos de Cauchy e Bolzano. O princípio geral da convergência das séries numéricas é tomado pela primeira vez como questão fundamental e enunciado rigorosamente.^a

^a<http://www.instituto-camoes.pt/cvc/ciencia/p7.html>

Definição de sucessão de Cauchy (Cunha-Cauchy)

Sucessão de Cauchy (Cunha-Cauchy) é uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica a seguinte propriedade

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n, k > p \Rightarrow |u_n - u_k| < \delta.$$

Ou seja, a partir de certa ordem os termos desta sucessão estão tão próximos uns dos outros quanto quisermos.

Teorema de Cauchy

Uma sucessão é de Cauchy se e só se é convergente.

Definição de subsucessão

Subsucessão de uma sucessão dada é uma sucessão que se obtém da primeira suprimindo um número finito ou infinito de termos e mantendo a ordem dos termos restantes, ou seja,

dada uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sucessão $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se se verificar

$$v_n = u_{\varphi(n)}, \text{ para todo o } n,$$

com

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \varphi(n) \end{aligned}$$

estritamente crescente.

Ao limite de uma subsucessão chama-se **sublimite**.

A sucessão

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

tem como subsucessões:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \dots \\ &\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \dots \\ &\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{150}, \frac{1}{161}, \dots \end{aligned}$$

Teorema

Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente para o mesmo limite,

ou seja,

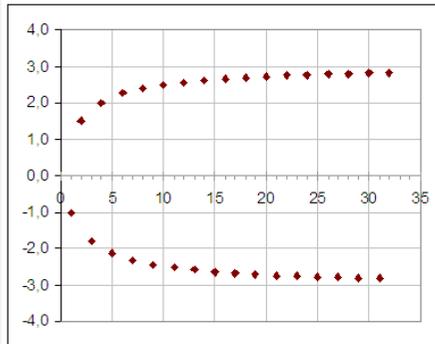
uma sucessão com dois sublimites diferentes convergente.

Confirmei no livro as minhas respostas.

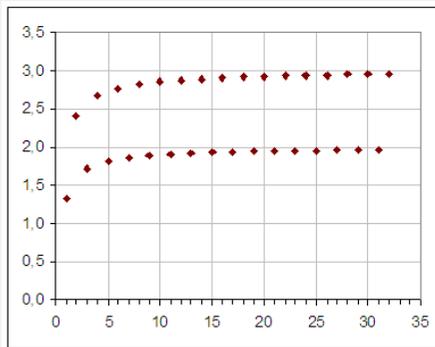
Este Teorema
num forma sim
uma **sucessã**

1. Considere as seguintes sucessões com a respectiva representação gráfica.

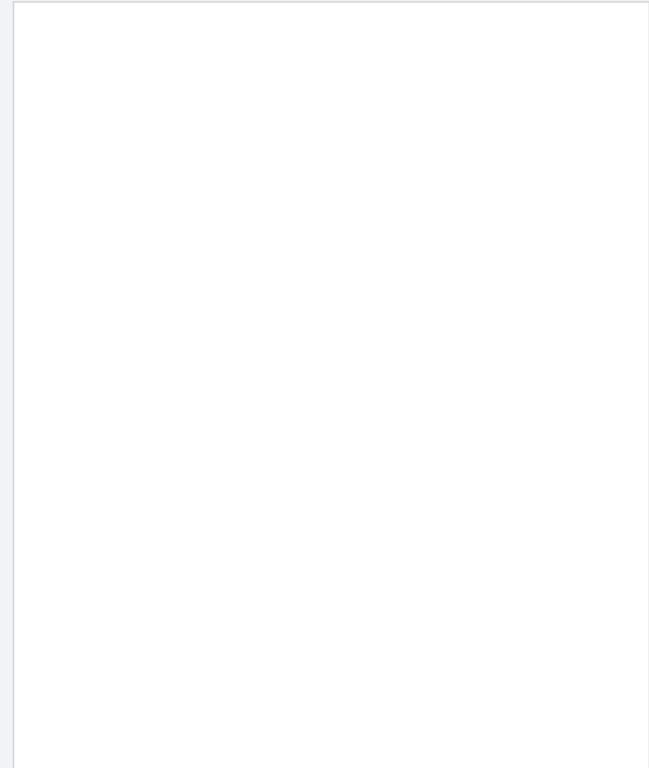
a) $\frac{3n(-1)^n}{n+2}$



b) $\frac{(\cos(n\pi) + 5)n}{2n+1}$



Mostre, rigorosamente, que as sucessões anteriores não têm limite.





Teorema das sucessões enquadradas

Dadas 3 sucessões $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

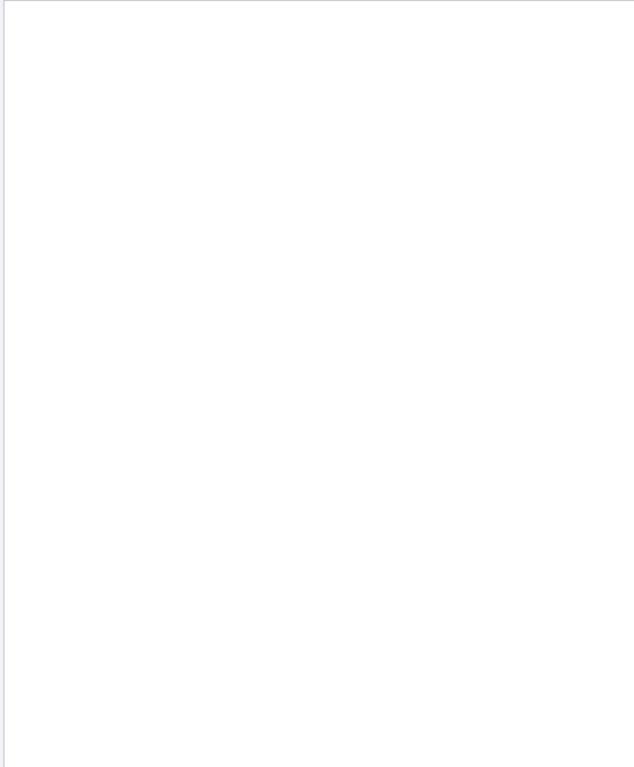
para todo o n (ou a partir de uma certa ordem p), se u_n e w_n tendem para um mesmo número a , então v_n também tende para a .

1. Usando o teorema das sucessões enquadradas, calcule:

a) $\lim_n \frac{\sin(n^3) + 5}{n^4}$



b) $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n} + \cos(n)}$

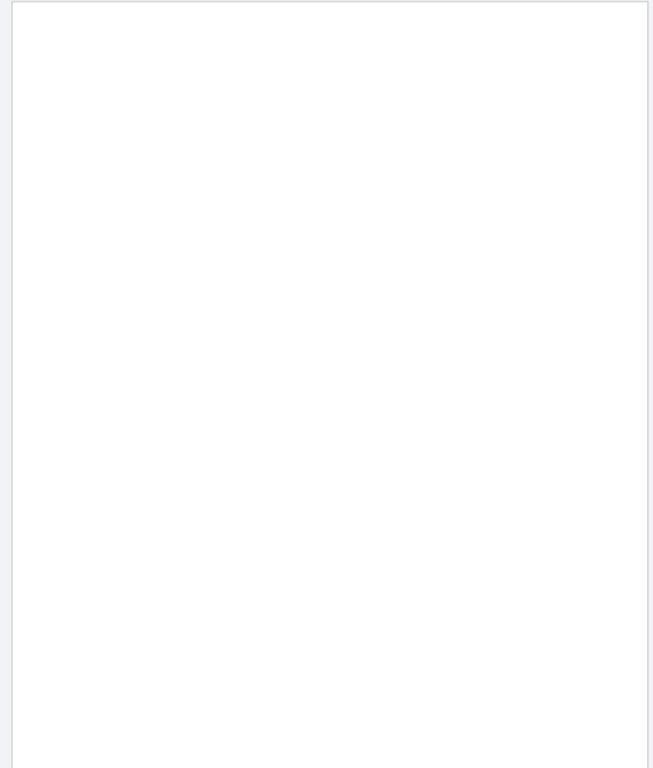


Teorema

Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos e $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sigma \quad \text{sse} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \sigma$$

1. Escreva os 5 primeiros termos de $u_n = \sqrt[n]{n+3}$.
É óbvio qual é o seu limite?
Determine-o usando o teorema.





2. Calcule:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$

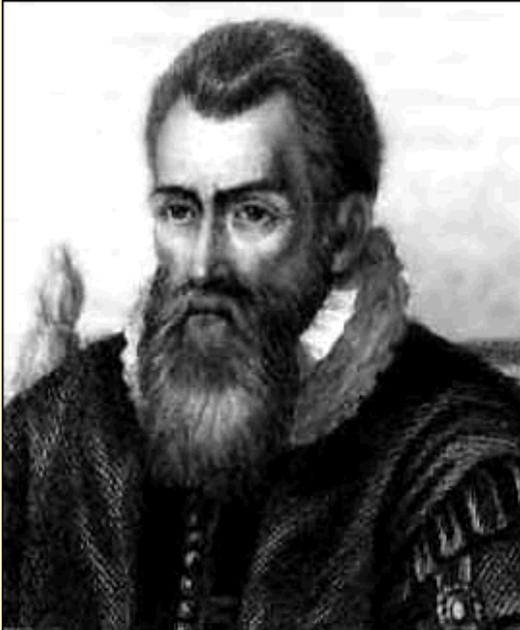
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((2n + 3)!n)^{\frac{1}{n}}$



O número de Neper

John Neper

(1550—1617) Escocês



Foi um matemático amador!

Um Nobre escocês entregue aos cuidados do seu castelo.

Fez projectos de máquinas bélicas para conter a invasão de Felipe II de Espanha (um espelho metálico que, através da incidência de raios solares, consegue incendiar navios a grande distância e também um carro armado móvel). Realizou um trabalho sobre logaritmos que demorou cerca de 20 anos.



O número de Neper pode ser encontrado em muitas situações reais... vejamos um caso em que se utilizam taxas de juro....

Uma conta começa com 1 com uma taxa de 100% ao ano.

Se o juro é creditado uma vez por ano, no fim de um ano tem-se

Mas se a taxa for calculada e adicionada duas vezes por ano (50% de cada vez), o 1 é multiplicado por $1+0.5$ duas vezes, ou seja, obtém-se $1 \times (1 + 0.5)^2 = 1 \times (1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$.

Calculando quatro vezes por ano, obtém-se
=2.4414.

Calculando mensalmente, obtém-se
=2.613035.

Bernoulli reparou que esta sucessão tende para um limite para mais e mais pequenos intervalos. Calculando semanalmente obtém-se 2.692597..., enquanto que calculando diariamente obtém-se 2.714567... apenas mais 2 cêntimos. Usando n como o número de intervalos para calcular $e^{\frac{1}{n}}$ a taxa a utilizar em cada intervalo, o limite para n grande é o número que ficou conhecido como

O número de Neper

e

...com cálculo contínuo, o valor na conta vai chegar a 2.7182818....

Mais geralmente, uma conta que começa com 1, e se obtém $1 + R$ euros com uma taxa aplicada uma única vez, obter-se-à e^R com cálculo contínuo.



O número de Neper: e

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots$$

... talvez o número mais interessante da análise matemática...

veremos mais à frente porquê...

Teorema

Seja u_n uma sucessão que, em módulo, tende para infinito e a_n uma sucessão que tende para a , então

$$\lim_n \left(1 + \frac{a_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

1. Mentalmente, $\lim_n \left(1 + \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{n^2}\right)^{n^2} =$



2. Calcule $\lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



Indeterminações



Por exemplo, se temos a soma de duas sucessões ambas a tender para infinito, que se representa por $+\infty + \infty$, o resultado é $+\infty$.

No entanto, se tivermos $+\infty - \infty$, o resultado pode ser $+\infty$, $-\infty$ ou qualquer número real. Vejamos:

$$\begin{aligned} n^2 - n &\rightarrow \\ n - n^2 &\rightarrow \\ n - n &\rightarrow \\ n - (n + 3) &\rightarrow \end{aligned}$$

Proposição

$+\infty + \infty =$	$0 \times 0 =$	
$-\infty - \infty =$	$\infty \times \infty =$	
$+\infty - \infty =$	$0 \times \infty =$	
$0 + 0 =$	$k \times 0 =$, $k \in \mathbb{R}$.
$0 - 0 =$	$k \times \infty =$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$0 + \infty =$	$a_n \times 0 =$, a_n limitada.
	$a_n \times \infty =$, a_n limitada.

Confirmei no livro as minhas respostas.

Proposiç

$$\frac{1}{\infty} =$$

$$\frac{1}{0} =$$

$$\frac{0}{0} =$$

$$\frac{0}{\infty} =$$

$$\frac{\infty}{0} =$$

$$\frac{\infty}{\infty} =$$

Confirmei no

Indeterminações

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

Para cada uma das indeterminações encontre, como vimos no exemplo anterior, sucessões que fazem com que esta indeterminação tenda para valores diferentes.



Outra forma que ajuda a perceber porque é que são indeterminações os casos:

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

(Atenção: isto não é uma demonstração rigorosa - serve apenas para solidificar a compreensão por via da intuição.)

Quanto a

$$1^\infty$$

repare que com uma pequena variação no 1, para valores ligeiramente superiores a 1 ou ligeiramente inferiores a 1, o resultado se altera muito...

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n \longrightarrow$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^n \longrightarrow$$

Quanto a

$$0^0$$

repare que com uma pequena variação no 0 (do expoente), para valores ligeiramente superiores a 0 ou ligeiramente inferiores a 0, o resultado se altera muito...

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{10}} \longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10} \longrightarrow$$

Quanto a

$$\infty^0$$

repare que com uma pequena variação no 0, para valores ligeiramente superiores a 0 ou ligeiramente inferiores a 0, o resultado se altera muito...

$$n^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{n} \longrightarrow$$

$$n^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{n}} \longrightarrow$$



Mapa Conceptual



Construa um mapa conceptual deste capítulo. (Usando as ferramentas de edição e o *Instantâneo* do *Adobe Reader*)

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to create a conceptual map of the chapter's content.



(continuação)





(continuação)





Para praticar... 2

Daqui em diante, sempre que lhe parecer útil,
utilize uma folha de cálculo  para fazer previsões e/ou confirmar os resultados.



1.* Calcule analiticamente os limites das seguintes sucessões.

a) $\frac{(n+2)^n}{n^{n+1}}$

b) $\frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}$



c)
$$\frac{n^2 + \cos(n)}{\sqrt{n} + n^5}$$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution for part c.

d)
$$(n + 1)^{\frac{1}{n}}$$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution for part d.



e)
$$\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$$

f)
$$\frac{((n+1)!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$



g) $\sqrt[n]{\frac{3^n n! + 1}{n^n}}$

h) $\frac{\sqrt{n!} + e^{2n}}{5\sqrt{n!} - e^n}$



i)
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + k}}$$





2.* Considere a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{2}, \quad \forall n > 1. \end{cases}$$

a) Note que cada termo é a média entre -1 e o termo anterior.

b) Calcule 8 termos da sucessão e faça o esboço de uma representação gráfica deles.



c) Qual lhe parece ser o limite da sucessão?

Vamos prová-lo rigorosamente...



d) Mostre, por indução, que $a_n > -1, \forall n \in \mathbb{N}$.

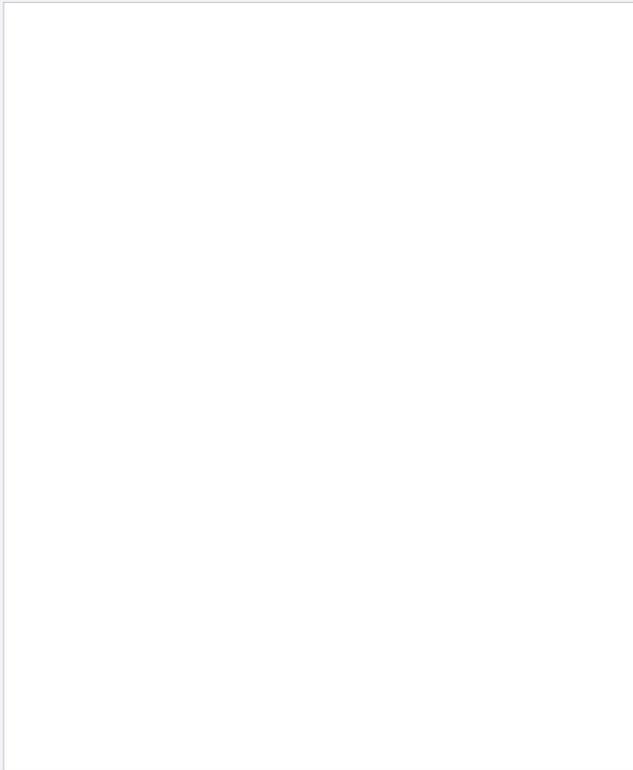
A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their proof by induction.

e) Estude a sucessão quanto à monotonia.

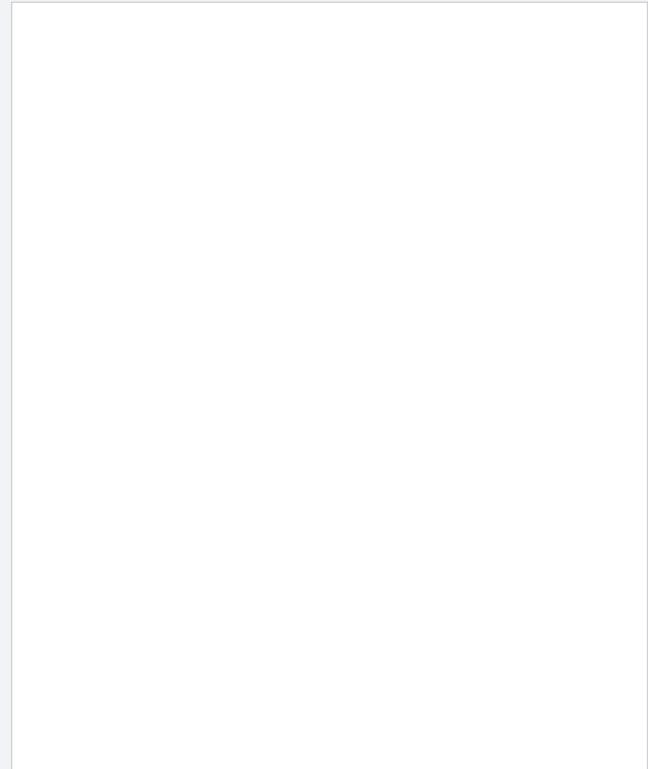
A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to analyze the sequence's monotonicity.



f) Esta sucessão é limitada?

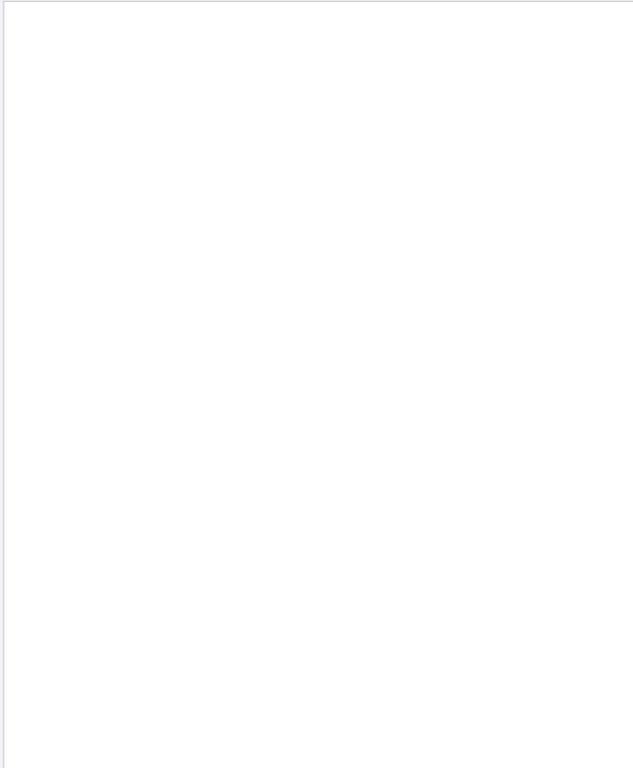


g) Pode garantir a existência de limite?





h) Qual é o limite da sucessão?





3. Calcule mentalmente:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} =$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12^n}{n^{12}} =$

c) $\lim_{k \rightarrow +\infty} 0.99^k =$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1.01^n =$



e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) =$

f) $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p} =$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{4 - 5n} =$

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3}{4 - n^4} =$



$$i) \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^m m^4 + 2}{m^2 + 3} =$$

$$j) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^4} =$$

$$k) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$l) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+q)} =$$

$$p, q \in \mathbb{N}$$



4. Associe a sucessão ao seu comportamento quando $n \rightarrow +\infty$.

a) $u_n = n(n+1) - 1$

b) $u_n = \frac{1}{n+1}$

c) $u_n = 1 - n^2$

d) $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$

- I Diverge para $-\infty$.
- II Diverge para $+\infty$.
- III Converge para 1.
- IV Converge para 0 por valores positivos.
- V Converge para 0 por valores positivos e negativos.



5. Calcule, apresentando os cálculos:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$

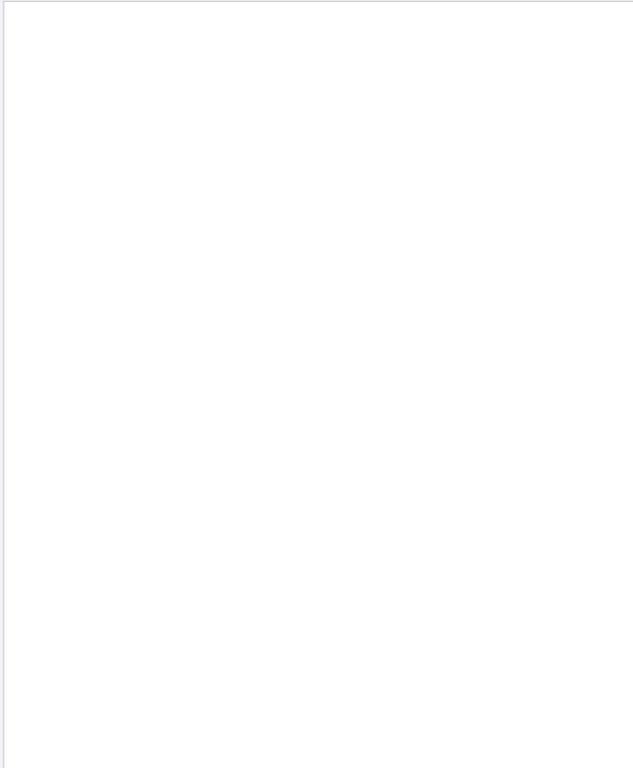
A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2 + k - 2}{k + 5}}$

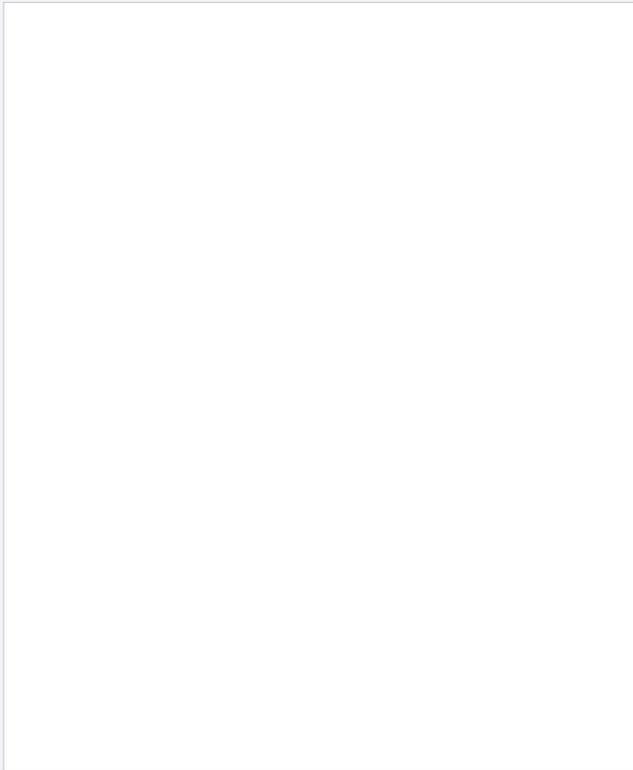


c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n + 1)^{\frac{1}{n}}$





d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$



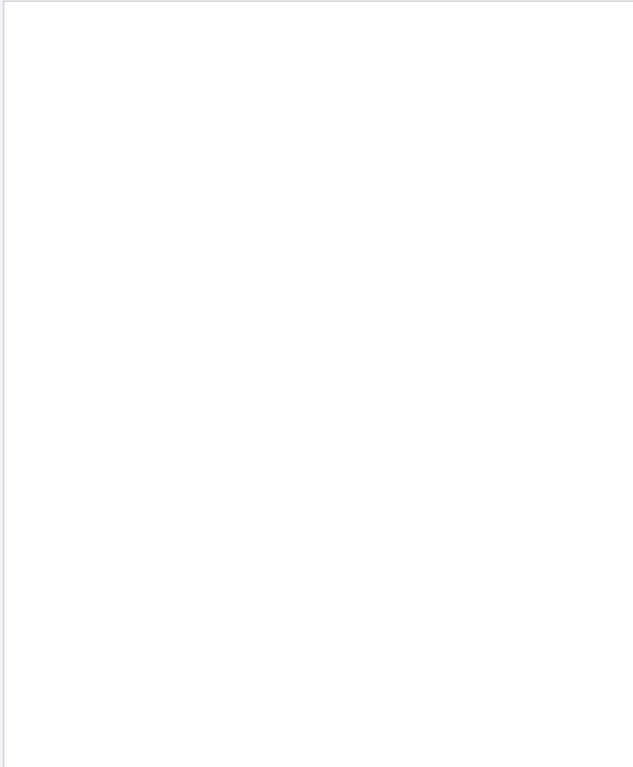


e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.

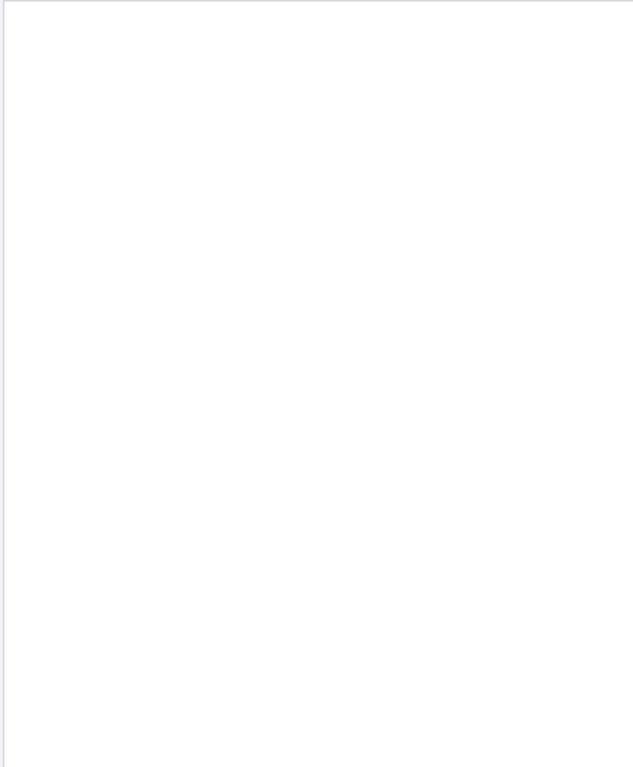


f) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{p!}\right)^{p!}$





g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n^3}\right)^{n^2}, a \in \mathbb{N}$





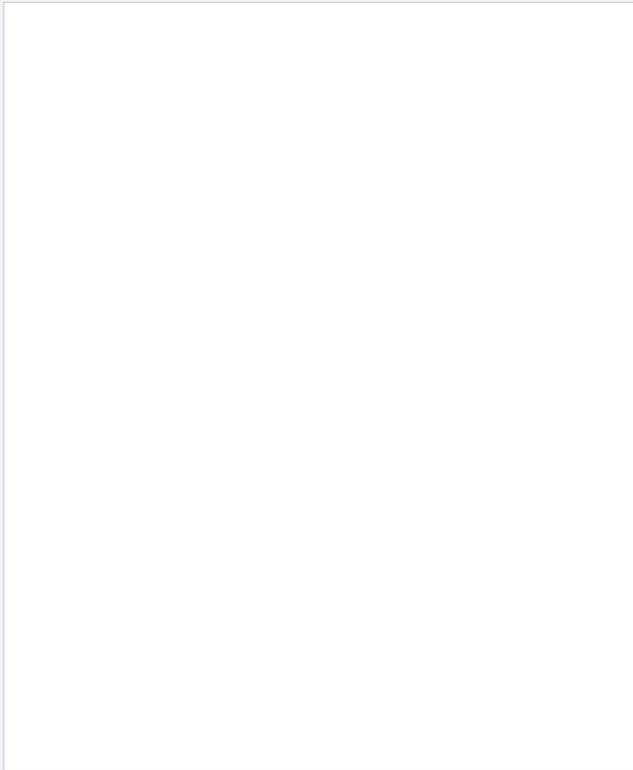
6. Calcule, apresentando uma cuidadosa justificação:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\pi)$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to provide a detailed justification for the limit calculation.



b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n + 1$





c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^n}{n^n}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



e)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{k^2 + n^2}$$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their solution to the limit problem.



7. Algumas destas sucessões convergem mais rapidamente que outras. Use uma *Folha de Cálculo*  para determinar para cada uma o menor valor de n de modo que o n -ésimo termo difira do limite menos de 0.001.

a) $\frac{1}{n^2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\frac{n}{10^n}$

d) $\frac{n^{10}}{10^n}$

e) $\frac{1}{n!}$

f) $\frac{2^n}{n!}$

g) $\frac{\ln(n)}{n^2}$

h) $\frac{\ln(n)}{n}$

Qual a que tem uma convergência mais rápida?

E mais lenta?



8. Sendo

$$a_n = \begin{cases} 10^n & \text{se } n < 100 \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 100 \end{cases}$$

então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =$.



9. A sucessão de Fibonacci é definida recursivamente por

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

com

$$a_1 = a_2 = 1.$$

a) Calcule $a_3, a_4, a_5, \dots, a_{10}$.

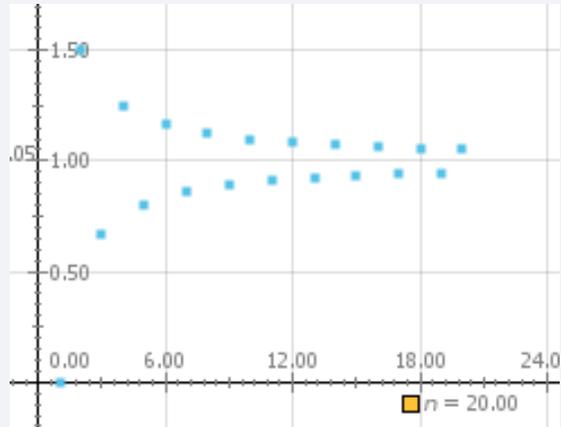
A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to show their work and calculate the terms of the Fibonacci sequence from a_3 to a_{10} .



- b) Defina a sucessão $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Calcule r_1, r_2, \dots, r_6 .

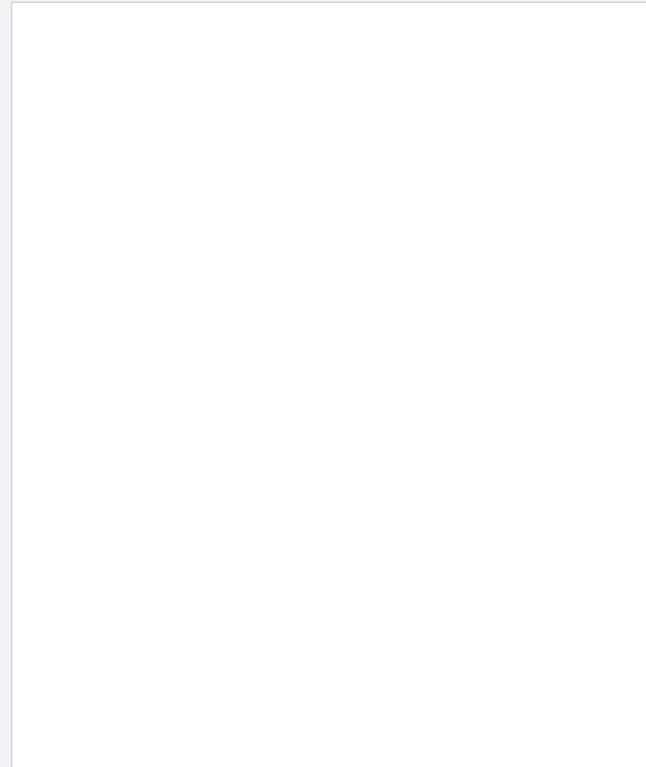
- c) Suponha que $r_n \rightarrow L$, e encontre L .
Sugestão: Mostre que $r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$

10. Considere o gráfico dos primeiros termos da sucessão $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.



- a) Esta sucessão parece-lhe convergente?

- b) Mostre-o por definição.





11. Seja a_n uma sucessão crescente tal que

$$1 \leq a_n \leq 3.$$

Justifique que a_n tem limite.

O que pode concluir acerca desse limite?



12. Seja a_n uma sucessão monótona tal que $a_n < 1$. Discuta a convergência de a_n .

Se a_n convergir, o que pode concluir acerca desse limite?



13. Indique exemplos de sucessões verificando as condições, ou explique porque não existem.
- a) Uma sucessão monótona crescente com limite 10.

 - b) Uma sucessão monótona crescente e limitada que não converge.

 - c) Uma sucessão que converge para $\frac{3}{5}$.

 - d) Uma sucessão não limitada que converge para 100.

14. Considere a sucessão de termo geral

$$S_n = I \left(1 + \frac{t}{12} \right)^n$$

onde I é o montante inicial, S_n é o saldo ao fim de n meses e t é a taxa de juro anual.

a) A sucessão é convergente? Justifique.

b) Usando uma *Folha de Cálculo*  calcule o saldo em cada mês do 1º ano, supondo que $I = 9000$ e $t = 0.055$.

c) Calcule o saldo ao fim de 10 anos (considere o caso da alínea anterior).



15. Suponha que em cada ano a inflação retira 5% do valor de um euro. Seja a_n o valor do euro ao fim de n anos de inflação.

a) Indique uma expressão para a_n .

b) Determine a_4 .

c) Qual o $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.



16. Suponhamos que tem que decidir entre comprar um carro novo ou um carro com dois anos, do mesmo modelo. Adoptando como critério de escolha o que corresponde ao menor custo depois da venda ao fim de 3 anos (contando com o valor recuperado com a venda). O custo consiste em duas partes: a desvalorização do carro e a manutenção mecânica. O carro novo custa 20 000 e a desvalorização anual é de 12%. A manutenção mecânica custa 400 no primeiro ano e aumenta 18 % nos anos subsequentes.
- a) No caso do carro novo, determine os 3 primeiros termos da sucessão d_n que indica a desvalorização em euros no ano n . Determine a expressão de d_n .
 - b) Determine os 3 primeiros termos da sucessão m_n , o custo em mecânica, em euros, de um carro novo no ano n . Determine a fórmula de m_n .
 - c) Determine o custo total de ter um carro novo por 3 anos.
 - d) Determine o custo total de ter um carro com 2 anos, por 3 anos. Qual deve comprar?

17. As vendas anuais a_n (em milhões de dólares) da *Avon Products, Inc.* de 1993 até 2002 estão na seguinte tabela:

n	a_n
3	3844
4	4267
5	4492
6	4814
7	5079
8	5213
9	5289
10	5683
11	5958
12	6171

onde n representa o ano, com $n = 3$ correspondendo a 1993.

Fonte: 2002 *Avon Products, Inc. Annual Report*

- Abra o ficheiro *Avon-regressão.wxm* do *WXMaxima* onde foi realizada uma regressão linear dos dados da tabela.
- Use o modelo para fazer uma previsão das vendas em 2010.

Bibliografia*

-  Rodrigues, J. A. (2007). *Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em IR*. Lisboa: Edições Colibri.
-  Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, Flath, Lock, Lomen, et al. (2005). *Calculus: Single Variable* (4th ed.). USA: John Wiley Sons, Inc
-  Ferreira, J. C. (1990). *Introdução à análise matemática* (3rd ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
-  Salas, Hille, Etgen (2003). *Calculus: One variable* (9th ed.). USA: John Wiley Sons, Inc.
-  Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (1990). *Calculus with analytic geometry*. Boston: Houghton Mifflin Company.
-  Varberg, D., Purcell, E. (1997). *Calculus* (7th ed.). USA: Prentice-Hall, Inc.
-  Stein, S., Barcellos, A. (1992). *Calculus and analytic geometry* (5th ed.). International: McGraw-Hill, Inc.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.



Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)



















