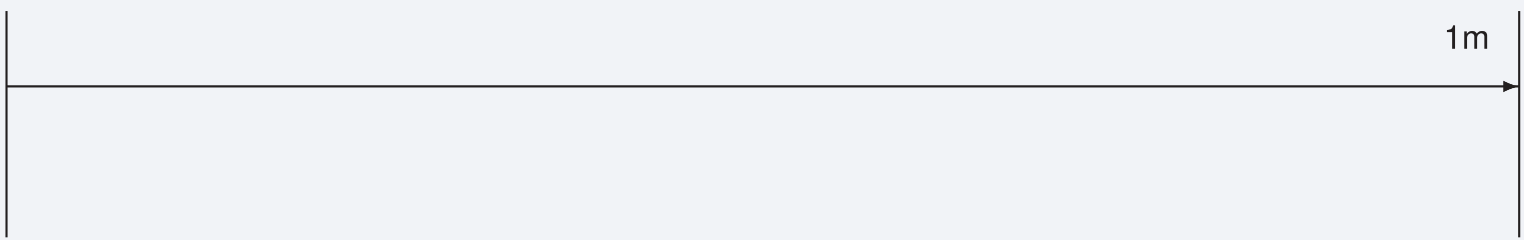
Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão $\approx$ 490 a.C.



Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão $\approx$ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão ≈ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

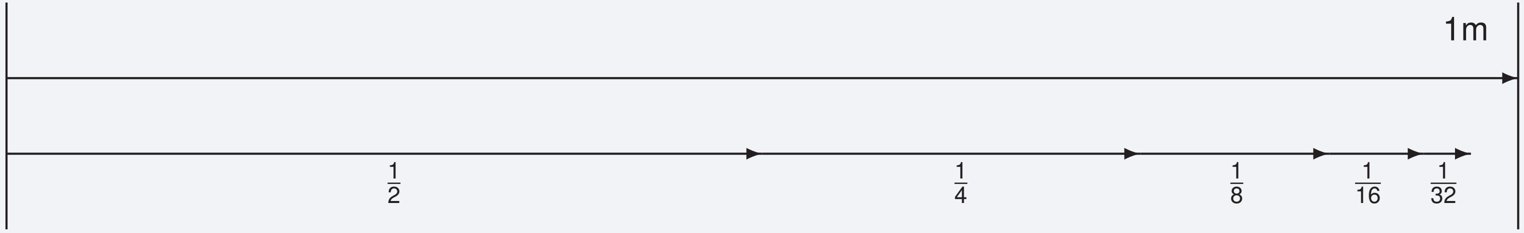
Zenão ≈ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão ≈ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão ≈ 490 a.C.



Capítulo 04: Séries numéricas

Zenão ≈ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

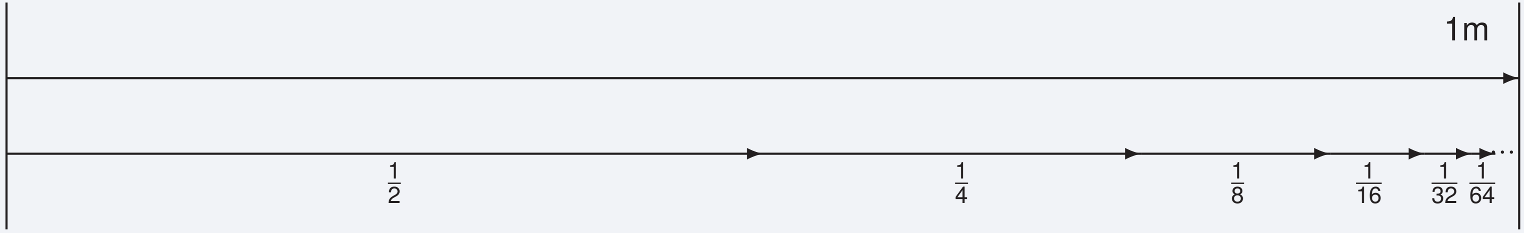
Zenão $\approx$ 490 a.C.

Capítulo 04: Séries numéricas

Uma ideia que levou
mais de 2000 anos a compreender...

Cauchy - 1789 d.C.

Zenão $\approx$ 490 a.C.



Sandra Gaspar Martins
16/10/2009

Introdução

A soma de infinitos números positivos é finita ou infinita?

uma quantidade (positiva) mais outra, mais outra, mais outra....mais...mais..., infinitas vezes dá:

- ☐ sempre infinita
- ☐ sempre finita
- ☐ às vezes finita outras infinita

Pois é...

todos temos a noção intuitiva de que se não paramos de adicionar, de acrescentar quantidades (positivas), inevitavelmente iremos parar a infinito...

... é uma noção errada que levou, pelo menos, 23 séculos a compreender...

no século V a.C. Zenão compreendeu que essa ideia levava a contradições, a paradoxos...

...mas essa ideia só foi, de facto, compreendida no século XVIII com a criação da análise matemática e, em particular, da teoria das séries ...

GAP

Zenão

(≈ 490 a.C. -- ≈ 425 a.C.) Grego

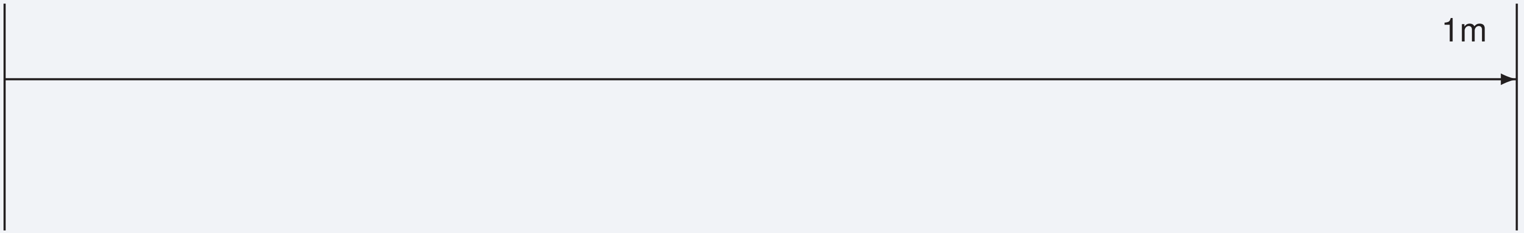
Zenão de Eleia foi um filósofo famoso por criar paradoxos que desafiaram a visão dos matemáticos sobre o mundo real durante séculos.

Foi discípulo de Parmenides e estudou com ele na escola de Eleia, uma das principais escolas pré-socráticas de filosofia grega. Foi contemporâneo de Platão com quem se encontrou em Atenas cerca de 450 a.C.

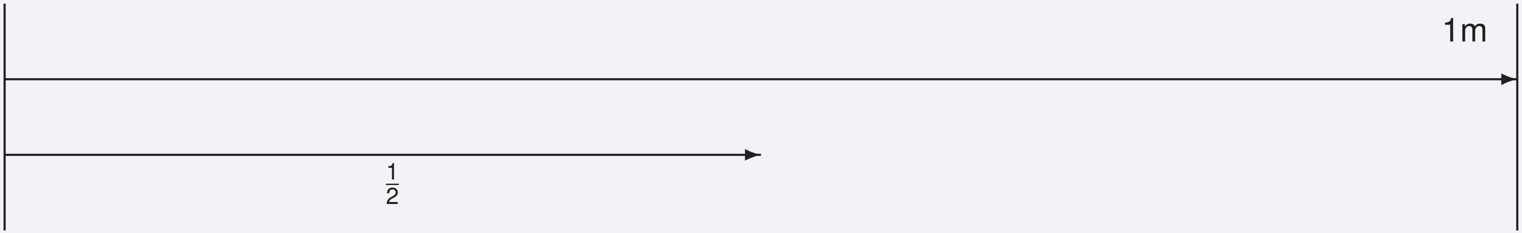
Introduziu, com os seus paradoxos, o método de prova por *redução ao absurdo*.

Paradoxo de Zenão
(Paradoxo da dicotomia do Movimento)

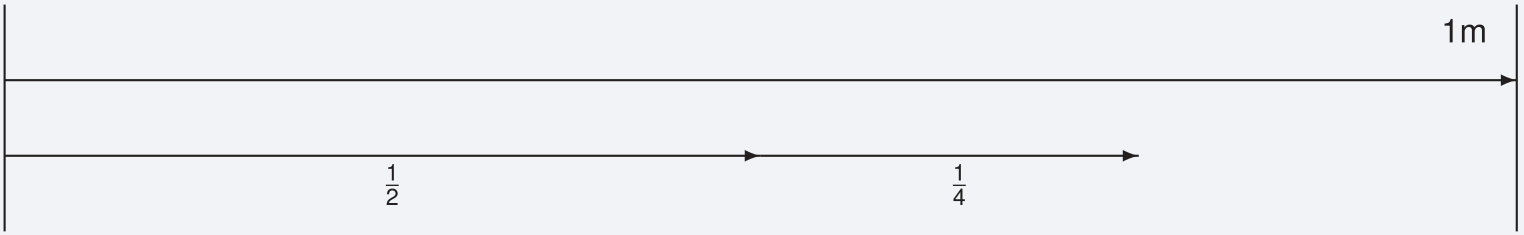
Para percorrer o caminho, que é de 1 m,
entre a parede do lado esquerdo e a do lado direito...



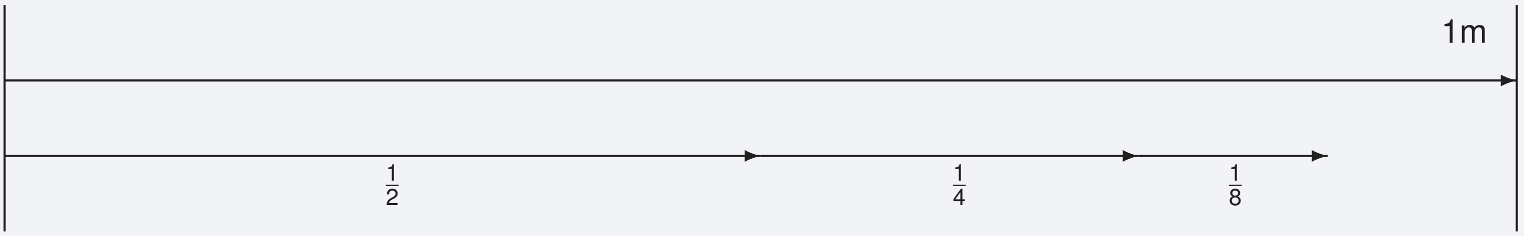
Haverá um momento em que se passará a meio,
faltando percorrer a outra metade...



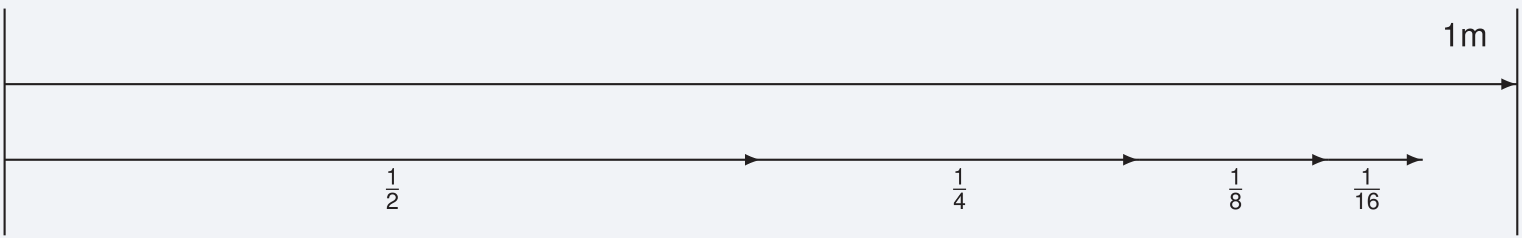
Pensando na distância que falta percorrer, haverá um momento em que se passará a meio, tendo percorrido já $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ da distância total e faltando percorrer o resto...



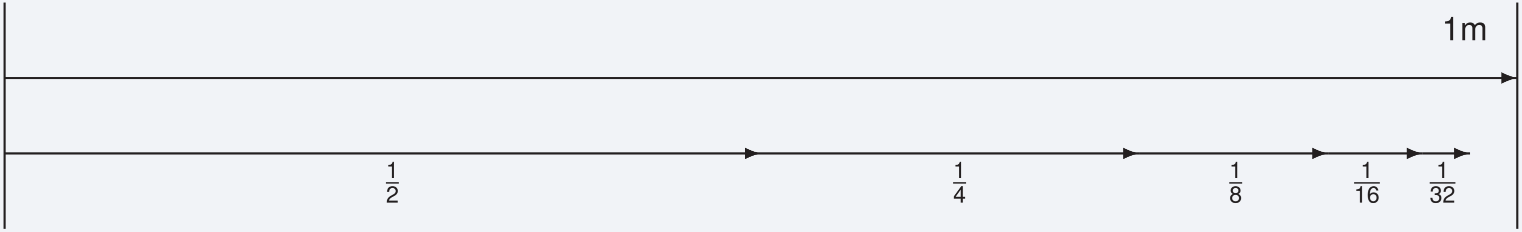
Pensando na distância que falta percorrer, haverá um momento em que se passará a meio, tendo percorrido já $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ da distância total e faltando percorrer o resto...



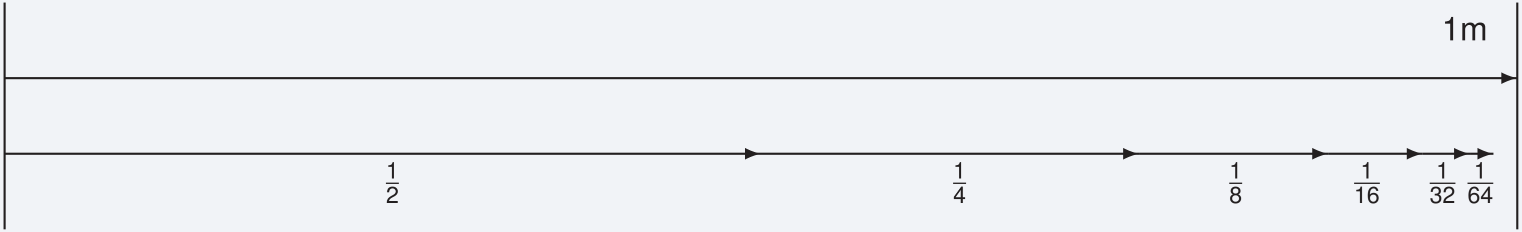
Pensando na distância que falta percorrer, haverá um momento em que se passará a meio, tendo percorrido já $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ da distância total e faltando percorrer o resto...



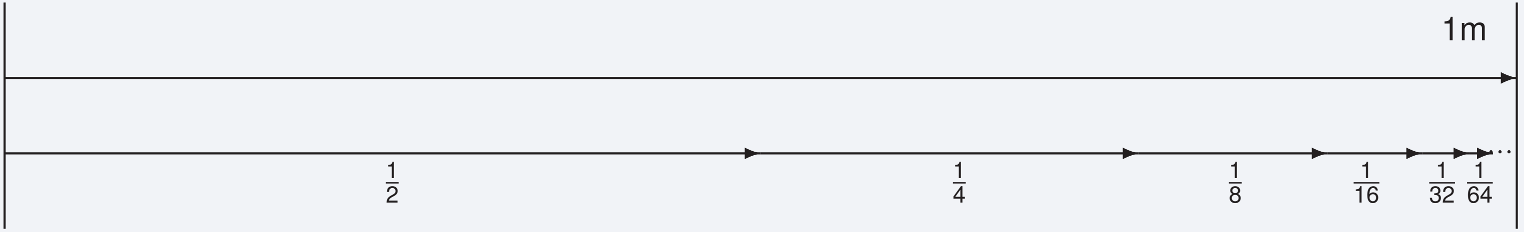
Pensando na distância que falta percorrer, haverá um momento em que se passará a meio, tendo percorrido já $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ da distância total e faltando percorrer o resto...



Pensando na distância que falta percorrer, haverá um momento em que se passará a meio, tendo percorrido já $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ da distância total e faltando percorrer o resto...



E assim *ad aeternum*...



Paradoxo de Zenão:
(descrito por Aristóteles e traduzido por [Heath])

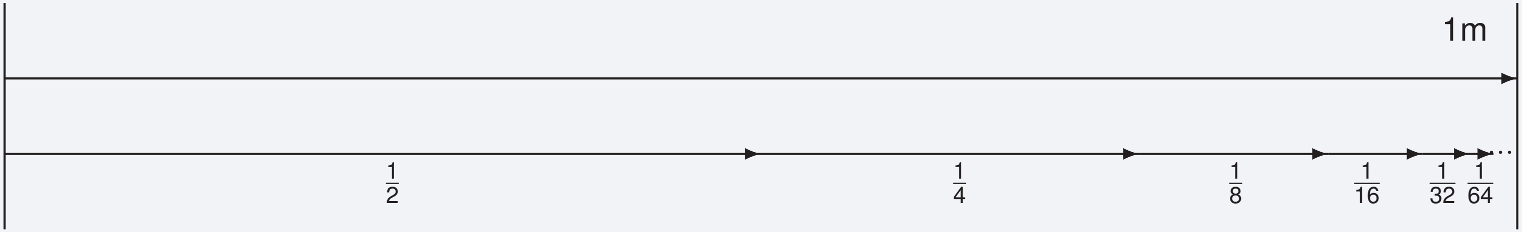
> *There is no motion because that which is moved must arrive at the middle (of its course) before it arrives at the end. (And of course it must tranverse the half of the half before it reaches the middle, and so on ad infinitum.)*

A base deste paradoxo é de que, como

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

é uma adição infinita
e portanto o seu resultado é infinito (de acordo com a crença na época)
então nunca se alcança a outra parede, o que, todos sabemos da experiência diária,
não é verdadeiro!

Era esta a contradição, o paradoxo, de Zenão!



Compreendemos felizmente, hoje em dia, que esta adição infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

não tem soma infinita, mas sim finita e igual a 1!!!

Esta soma nunca ultrapassa o valor 1
(é evidente pela forma como foi construída),
não há nenhum número entre ela e 1
(está tão perto quanto se quiser de 1)

portanto é igual a 1!!!!!

Assim ...

A soma de infinitos números pode ser finita!!!

Mas será sempre finita?

Pense nas séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

Serão finitas?

Pois é...

A soma de infinitos números positivos pode ser finita, infinita...

E é disso que nos vamos ocupar neste capítulo...
Dada uma série, conseguir afirmar se a sua soma é finta
(se a série é convergente) ou não!

As aplicações das séries são infinitas:

Na Economia:

- Uma descida de impostos, se a população poupar uma parte e gastar outra parte, que volta a entrar na economia e a produzir riqueza e assim sucessivamente traduz-se num valor de riqueza muito superior ao proporcionado pela descida de impostos. Este valor é obtido utilizando séries...

Na Medicina:

- Quando se toma um medicamento, uma parte é eliminada mas outra mantém-se no organismo. Se o tomarmos durante muito tempo seguido, descobrir o valor que se mantém no organismo com um certo valor de toma diária, é um problema que se resolve utilizando séries...

Na Música:

- Os harmónicos estão relacionadas com a série harmónica...

Na Física:

- Quando um bola cai no chão, e volta a saltar, e volta a cair, e assim indefinidamente, a distância total percorrida pela bola é dada por uma série....

$\cdots$

mas, mais importante que estas aplicações,
são as aplicações das séries de funções
(uma generalização das séries numéricas)
que estudaremos mais à frente...

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- ☐ calcular a soma de séries geométricas e de Mengoli;
- ☐ calcular, com o auxílio do computador, algumas somas parciais de uma série;
- ☐ verificar se é adequado e, nesse caso, utilizar tabelas para obter valores aproximados da soma de uma série;
- ☐ utilizar as séries de referência;
- ☐ para alguns tipos de séries, obter majorações para restos dessas séries;
- ☐ encontrar exemplos dos vários tipos de séries;
- ☐ intuir quanto à convergência ou divergência de séries (simples);
- ☐ escolher um critério adequado para estudar a natureza de uma série;
- ☐ estudar séries quanto à convergência absoluta;
- ☐ resolver problemas utilizando séries.

Competências globais

Também deve:

- ☐ escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- ☐ justificar os raciocínios;
- ☐ compreender e utilizar a linguagem matemática;
- ☐ utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- ☐ formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- ☐ fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (nestes, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ☐ ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

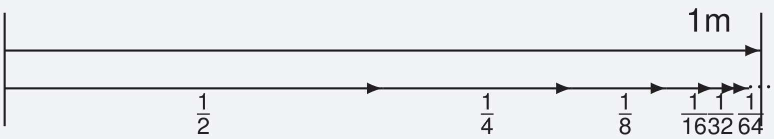
Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a] Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Definições

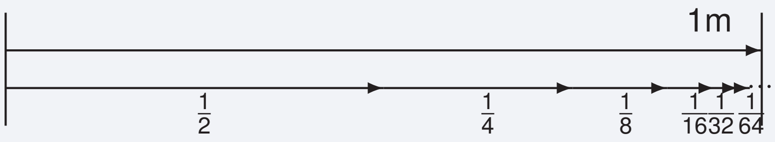
Analisemos a série do Paradoxo de Zenão...



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

pode escrever-se como

Analisemos a série do Paradoxo de Zenão...



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

pode escrever-se como

$$=\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\dots$$

Analisemos a série do Paradoxo de Zenão...

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

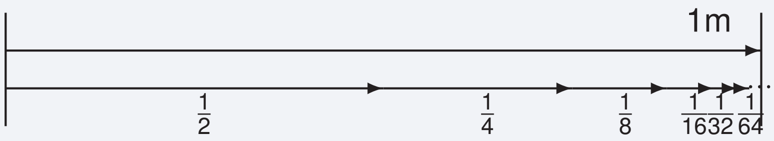
pode escrever-se como

$$=\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\dots$$

de uma forma compacta, pode-se escrever

Analisemos a série do Paradoxo de Zenão...



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

pode escrever-se como

$$=\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\dots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\dots$$

de uma forma compacta, pode-se escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Série

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais,

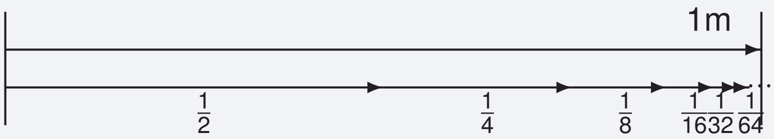
$$a_1+a_2+a_3+\dots$$

é uma **série** que se representa por

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$ são os **termos** da série.
a_n é o **termo geral** da série.

...ainda com a série do paradoxo:



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Pensemos agora na sucessão:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

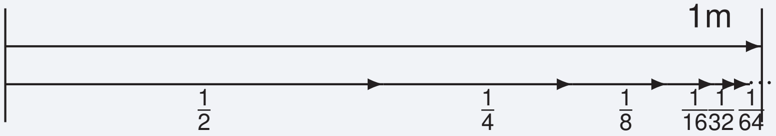
$$\vdots$$

Qual a representação geométrica desta sucessão no diagrama?

Qual o limite de S_n?

Como podemos relacionar a sucessão S_n com o facto da série ter soma 1?

...ainda com a série do paradoxo:



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Pensemos agora na sucessão:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$\vdots$$

Qual a representação geométrica desta sucessão no diagrama?

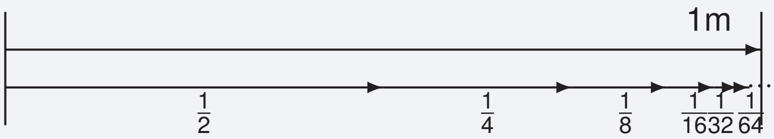
Qual o limite de S_n?

Como podemos relacionar a sucessão S_n com o facto da série ter soma 1?

... a sucessão S_n dá a soma dos termos da sucessão $a_n = \frac{1}{2^n}$ até ao n-ésimo termo...

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

...ainda com a série do paradoxo:



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Pensemos agora na sucessão:

$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$S_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

$\vdots$

Qual a representação geométrica desta sucessão no diagrama?

Qual o limite de S_n?

Como podemos relacionar a sucessão S_n com o facto da série ter soma 1?

... a sucessão S_n dá a soma dos termos da sucessão $a_n = \frac{1}{2^n}$ até ao n-ésimo termo...

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

quando n tende para infinito ...

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

Convergência

Dada a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$
$\vdots$

$(S_n)_{n\in N}$ é a **sucessão das somas parciais**.

Se o limite de $(S_n)_{n\in N}$ é um número real S,
a série diz-se **convergente**[a]
e a **soma** da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ é S.

Se o limite de $(S_n)_{n\in N}$ não é um número real
(não existe ou é infinito),
a série diz-se **divergente**[b] (e não tem soma).

[a] ou de natureza convergente
[b] ou de natureza divergente

Mais formalmente podemos definir série como

Série

Designamos por **série** numérica o par formado por uma sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números reais e pela sucessão

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em vez de representar uma série usando o par das sucessões que a constituem, usam-se correntemente as notações $\sum\limits_{k=1} a_k$ ou $\sum a_k$.

Nota:
Repare que existem duas sucessões envolvidas na definição de uma série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

e que são muitas vezes erroneamente confundidas...

A sucessão dos termos da série:

$$a_n$$

(dos números a serem somados)

e **a sucessão das somas parciais**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(da soma dos n primeiros números da série)

Por exemplo, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

tem associadas duas sucessões:

- $$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
  ou seja, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ que é a

  com limite ;
- $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
  ou seja,
  $$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$$
  ou seja, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \ldots$ que é a

  com limite

  .

1. Complete:

   Uma série é convergente se a sua ______ for convergente.

2. Apenas com o objectivo de ganhar intuição, escreva por extenso a adição de alguns termos das seguintes séries. Diga se lhe parece que essas séries são convergentes ou divergentes.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (lembre-se do paradoxo de Zenão)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 0$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} 100$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000}$

3. Escreva a sucessão das somas parciais e diga se é convergente ou divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

Neste caso, ao contrário de muitos outros, consegue determinar a soma da série. Mais, este caso, torna evidente que as séries convergentes nos proporcionam uma nova forma de escrever os números reais...

4. Escreva a sucessão das somas parciais e diga se é convergente ou divergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

5. Apenas com o objectivo de ganhar intuição... Para cada uma das seguintes séries, use uma *Folha de Cálculo* para encontrar muitos termos das suas sucessões das somas parciais (transcreva para aqui os gráficos/tabelas que utilizar). Diga se lhe parece que são convergentes, ou divergentes. Quando fizer sentido diga qual lhe parece ser a sua soma...

... abra o ficheiro *somaparcial.xls*...

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi)}{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{e^n}$

Teoremas

Teorema

A natureza de uma série não depende do valor dos seus p primeiros termos, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. A soma da série depende.

1. Considere as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Estude-as quanto à natureza e soma.

Teorema

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes com soma A e B, respectivamente, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

são convergentes e têm soma $A + B$ e λA, respectivamente.

Teorema

Se existir $k \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$a_{n+k} = b_n$$

para todo o n a partir de certa ordem, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza.

2. Explique, por palavras suas, o teorema anterior.

3. Verifique que não faz sentido que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

4. Use os teoremas anteriores para mostrar que:

a) Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3$.

b) Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente então $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{3}{2^{n+4}}$ também é convergente.

c) Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-10}$ é convergente então $\sum_{n=10}^{\infty} \left[5(n+2)^{-10} + n^{-10}\right]$ também é convergente.

Séries Geométricas, de Mengoli e de Dirichlet

Efeito multiplicador na economia

Suponha que o governo decide baixar os impostos em 8 milhões de euros.

Suponha que cada pessoa gasta 95% da receita extraordnária e guarda o resto.

Estime o efeito total da descida dos impostos na actividade económica.

Vamos utilizar como unidade os milhões de euros.

Qual o valor de receita extraordinária no instante inicial?

Qual o valor que se obterá devido a que cada pessoa gasta 95% da sua receita extraordinária?

Esse valor vai voltar a circular e as pessoas voltarão a gastar 95% dele, ou seja:

Mais uma vez, esse valor vai voltar a circular e as pessoas voltarão a gastar 95% dele, ou seja:

De novo, esse valor vai voltar a circular e as pessoas voltarão a gastar 90% dele, ou seja:

e assim sucessivamente...

Escreva uma série que represente a quantidade total de receita extraordinária criada pela descida de impostos.

Utilize uma *folha de cálculo* para obter uma estimativa da soma da série em questão.

Vamos aprender em seguida como calcular esta soma rigorosamente...

Vejamos como calcular a soma das **séries geométricas**[a]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

onde r é um número real fixo, chamado **razão**.

A soma de uma série é $\boxed{}$ das somas parciais, portanto vamos começar por determinar as somas parciais.

[a] o termo série geométrica advém de **Progressão geométrica**, ou seja, sucessão em que cada termo se obtém do anterior multiplicando pela razão r.

Seja S_n a soma parcial até n de uma série geométrica, ou seja,

$$S_n = \boxed{}$$

logo

$$rS_n = \boxed{}$$

então

$$S_n - rS_n = \boxed{}$$

ou seja,

$$S_n(1-r) = \boxed{}$$

e portanto

$$S_n = \boxed{}, \; r \neq \boxed{}$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \quad =$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k$$

$$=$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \end{aligned}$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \\
&=
\end{aligned}
$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \\
&= \frac{r - \lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n =$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\
&= \lim_{n\to+\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \\
&= \frac{r-\lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r| > 1 \ \vee \ r = -1 \end{cases}$$

então

$$(*) =$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \\ &= \frac{r - \lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r| > 1 \ \vee \ r = -1 \end{cases}$$

então

$$(*) = \begin{cases} \dfrac{r-o}{1-r} = \dfrac{r}{1-r} & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r| > 1 \ \vee \ r = -1 \end{cases}$$

No caso $r = 1$, voltemos a analisar a série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1^k$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} r^k\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r\neq 1)\\ &= \frac{r-\lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r|<1\\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee\ r=-1\end{cases}$$

então

$$(*) = \begin{cases} \dfrac{r-o}{1-r} = \dfrac{r}{1-r} & \text{se} \quad |r|<1\\[2ex] \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee\ r=-1\end{cases}$$

No caso $r=1$, voltemos a analisar a série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} 1$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r\neq 1) \\ &= \frac{r-\lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r|<1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee \ r=-1 \end{cases}$$

então

$$(*) = \begin{cases} \dfrac{r-o}{1-r} = \dfrac{r}{1-r} & \text{se} \quad |r|<1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee \ r=-1 \end{cases}$$

No caso $r=1$, voltemos a analisar a série:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} 1^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+\ldots.\end{aligned}$$

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r \neq 1) \\ &= \frac{r - \lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r| > 1 \ \vee \ r = -1 \end{cases}$$

então

$$(*) = \begin{cases} \dfrac{r-o}{1-r} = \dfrac{r}{1-r} & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r| > 1 \ \vee \ r = -1 \end{cases}$$

No caso $r = 1$, voltemos a analisar a série:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} 1^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+\ldots. \\ &= +\infty \end{aligned}$$

que é, portanto,

Assim, como a soma da série é o limite das somas parciais,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{r-r^n}{1-r} \qquad (r\neq 1) \\ &= \frac{r-\lim_{n\to+\infty} r^n}{1-r} \qquad (*)\end{aligned}$$

Ora, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r|<1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee \ r=-1 \end{cases}$$

então

$$(*) = \begin{cases} \dfrac{r-o}{1-r} = \dfrac{r}{1-r} & \text{se} \quad |r|<1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad |r|>1 \ \vee \ r=-1 \end{cases}$$

No caso $r=1$, voltemos a analisar a série:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} 1^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 1 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+\ldots. \\ &= +\infty\end{aligned}$$

que é, portanto, divergente.

Resumindo...

Série geométrica de razão r

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + \dots \qquad (r \in \mathbb{R}).$$

- Se $|r| \geq 1$ a série diverge.
- Se $|r| < 1$ a série converge e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}.$$

Voltando ao problema do *Efeito multiplicador na economia*...
tínhamos obtido uma série que representa a quantidade total de receita extraordinária criada pela descida de impostos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8\left(\frac{95}{100}\right)^n$$

que é igual a

$$8\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{95}{100}\right)^n$$

e, portanto, como $r = \frac{95}{100} < 1$, a sua soma é

Série geométrica de razão r

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r^1 + r^2 + r^3 + r^4 + \dots \qquad (r \in \mathbb{R}).$$

- Se $|r| \geq 1$ a série diverge.
- Se $|r| < 1$ a série converge e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}.$$

Voltando ao problema do *Efeito multiplicador na economia*...
tínhamos obtido uma série que representa a quantidade total de receita extraordinária criada pela descida de impostos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8 \left(\frac{95}{100}\right)^n$$

que é igual a

$$8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{95}{100}\right)^n$$

e, portanto, como $r = \frac{95}{100} < 1$, a sua soma é

$$8 \times \frac{\frac{95}{100}}{1 - \frac{95}{100}} = 8 \times 19 = 152$$

Assim, a quantidade total de receita extraordinária criada pela descida de 8 milhões de euros de impostos é de 152 milhões de euros!

Podem começar a escrever cartas para a Assembleia da República...
:)

1. Identifique as séries que são geométricas.
   Para essas, calcule a soma (se existir).

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{p=4}^{\infty} \frac{1}{3^p}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{3}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3^{n}}{8^{n+5}}$

g) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{4p}{5^k} \quad (p \in \mathbb{R})$

h) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} 6^{-3n+2}$

Pietro Mengoli

(1626/7 -- 1686) Italiano

DivulgaMAT

Pietro Mengoli - foi padre na Igreja de Santa Maria Madalena em Bolonha.
Foi o primeiro a calcular somas de séries não geométricas, a enunciar o conceito geral de convergência e divergência, e a mostrar que a série harmónica é divergente.

Vamos estudar a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+2}) .$$

Comecemos por estudar as somas parciais:

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=1}^{p} (a_n - a_{n+2}) \\ &= a_1 - a_3 + a_2 - a_4 + a_3 - a_5 + a_4 - a_6 + \ldots a_{p-3} - a_{p-1} + a_{p-2} - a_p + a_{p-1} - a_{p+1} + a_p - a_{p+2} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{p-3} + a_{p-2} + a_{p-1} + a_p \\ &\qquad - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - \quad \ldots \quad - a_{p-1} - a_p - a_{p+1} - a_{p+2} \\ &= a_1 + a_2 - a_{p+1} - a_{p+2} \end{aligned}$$

então

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} a_1 + a_2 - a_{p+1} - a_{p+2}$$

mas $\lim\limits_{p\to+\infty} a_{p+1} \lim\limits_{p\to+\infty} a_{p+2} = \lim\limits_{p\to+\infty} a_p$

logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+2}) = \lim_{n\to+\infty} S_n = a_1 + a_2 - 2 \lim_{n\to+\infty} a_n$$

generalizando...

Série de Mengoli ou redutível

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k})$$

$(k \in \mathbb{N}, \quad a_n$ uma sucessão$)$

- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existir ou não for finito, a série diverge.
- Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ então a série converge e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - kL.$$

1. Identifique as séries que são de Mengoli. Para essas, calcule a soma (se existir).

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{(n+6)^5}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+3}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(n)-\sin(n-3))$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+12)^5}-\frac{1}{(n+8)^5}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+5}\right)$

f) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-3)}$

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8}{n^2+3n+2}$

h) $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s-3)(s+5)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+4)^2}\right)$

Teste moodle

1. Use uma folha de cálculo para criar uma tabela com alguns termos da sucessão das somas parciais de algumas das séries que se seguem. Qual parece ser a sua natureza?

$$\ldots \sum n^{10} \quad \sum n^2 \quad \sum n \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{5}}} \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \sum \frac{1}{n} \quad \sum \frac{1}{n^{1.1}} \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^3} \quad \sum \frac{1}{n^5} \quad \sum \frac{1}{n^{10}} \ldots$$

De facto:

$$\underbrace{\cdots \sum n^{10} \quad \sum n^2 \quad \sum n \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{5}}} \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \overbrace{\sum \frac{1}{n}}^{\text{série harmónica}}} \quad \underbrace{\sum \frac{1}{n^{1.1}} \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n^3} \quad \sum \frac{1}{n^5} \quad \sum \frac{1}{n^{10}} \cdots}$$

pois...

Dirichlet

(1805 -- 1859) Alemão

GAP

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet - Lejeune Dirichlet's family came from the Belgium town of Richelet where Dirichlet's grandfather lived. This explains the origin of his name which comes from "Le jeune de Richelet" meaning "Young from Richelet".

His work on units in algebraic number theory Vorlesungen über Zahlentheorie (published 1863) contains important work on ideals. He also proposed in 1837 the modern definition of a function...

Série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots$$

$$(\alpha \in \mathbb{R})$$

- Se $\alpha \leq 1$ a série diverge.
- Se $\alpha > 1$ a série converge.

1. Volte a olhar para as tabelas com muitos termos da sucessão das somas parciais da série harmónica e da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Parece-lhe que, de facto, uma converge e a outra diverge?

Consegue ter a certeza absoluta? Vamos então prová-lo de forma rigorosa e rápida...

2. Vejamos que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = s$$

(com s um número real) não pode acontecer...

A divisão por 2 dá

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \frac{s}{2}.$$

Subtraindo-as obtemos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{s}{2}.$$

Estas duas séries não podem valer ambas $\frac{s}{2}$. Porquê?

Vejamos, de outra forma, que a série harmónica é divergente ...

3. A série harmónica é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots .$$

Repare que

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} >$
$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

$\vdots$

Conclusão?

4. Identifique as séries de Dirichlet. Estude a sua natureza. Quando fizer sentido, utilize uma folha de cálculo para obter uma estimativa da soma da série.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

c) $\displaystyle\sum_{p=4}^{\infty} \frac{1}{3^p}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-7}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{3}$

f) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^3 \quad (p \in \mathbb{R})$

Teste moodle

Critérios de Convergência

Consequência do critério geral de Cauchy (CCGC)

$$\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \longrightarrow 0,$$

ou seja,

Riscar o que não interessa:

$$a_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

ou seja,

$$a_n \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge}$$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Indique um exemplo que mostre que o que riscou, no critério anterior, era, de facto, falso!

2. Usando o critério anterior estude, se possível, a natureza das séries:

a) $\sum n^2$

b) $\sum \dfrac{n^2+2n}{1-3n^2}$

c) $\sum \frac{1}{n}$

d) $\sum \frac{1}{n^2}$

3. Faça um diagrama de Venn (ou outro esquema) onde relacione as séries convergentes, as divergentes, as séries cujo termo geral tende para 0 e as cujo termo geral não tende para 0.

Critério de comparação (CC)

$$0 \leq a_n \leq B_n$$

(a partir de certa ordem)

então

Risque o que não interessa:

$$\sum a_n \text{ conv} \Rightarrow \sum B_n \text{ conv}$$

$$\sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum B_n \text{ div}$$

$$\sum B_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$

$$\sum B_n \text{ div} \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Usando o critério anterior estude, se possível, a natureza das séries:

   a) $\sum \frac{1}{n^2+5}$

   Sug: Compare com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^2}$.

b) $\sum \dfrac{3}{n^5 + 3n + 2}$

c) $\sum \dfrac{1}{n - 2}$

d) $\sum \dfrac{n^2+3}{n^3}$

e) $\sum \dfrac{|\sin(2n)|}{n^2+5}$

f) $\sum \dfrac{|\cos(n+4)|}{10^n+5}$

Critério de comparação no limite (CCL)

$a_n, b_n \geq 0$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l$$

- $0 < l < +\infty$,

$$\sum a_n \text{ conv} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ conv}$$

- $l = 0$,

$$\sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$

$$\sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div}$$

- $l = +\infty$,

$$\sum b_n \text{ div} \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$

$$\sum a_n \text{ conv} \Rightarrow \sum b_n \text{ conv}$$

1. Usando o CCL estude, se possível, a natureza das séries:

   a) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2 - 5}$

   Sug: Compare com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^2}$.

b) $\sum \dfrac{1}{n^5 - 5}$

Sug: Compare com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^2}$.

c) $\sum \dfrac{1}{4^n + 3^n}$

d) $\sum \frac{4}{n^5 - 3n - 2}$

e) $\sum \frac{2^{n+2}}{4^n + n^9}$

f) $\sum \frac{1}{n-2}$

g) $\sum \frac{n^2+3}{n^3}$

h) $\sum \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^4 + 2n}$

i) $\sum \dfrac{n^2 - 3n}{n^4 - n + 1}$

j) $\sum \frac{5}{\sqrt{n+1}}$

D'Alembert

(1717 -- 1783) Francês

GAP

Jean d'Alembert was the illegitimate son from one of Mme de Tencin 'amorous liaisons'. His father, Louis-Camus Destouches, was out of the country at the time of d'Alembert's birth and his mother left the newly born child on the steps of the church of St Jean Le Rond. The child was quickly found and taken to a home for homeless children. He was baptised Jean Le Rond, named after the church on whose steps he had been found. Later on he changed his name.

D'Alembert was a a French mathematician who was a pioneer in the study of differential equations and their use of in physics. He studied the equilibrium and motion of fluids.

Critério D'Alembert

$a_n \geq 0$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ =1 & \text{nada se conclui} \\ >1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ div} \end{cases}$$

1. Usando o critério D'Alembert estude, se possível, a natureza das séries:

   a) $\sum \frac{e^n}{n!}$

b) $\sum \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$

c) $\sum \dfrac{1}{4n^2-3}$

d) $\sum \dfrac{1}{n^4 - 3n - 2}$

e) $\sum e^{-3n+5}$

f) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

g) $\sum \frac{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}{1 \times 5 \times 9 \times \ldots \times (4n-3)}$

Cauchy

(1789 -- 1857) Francês

GAP

Augustin-Louis Cauchy pioneered the study of analysis, both real and complex, and the theory of permutation groups. He also researched in convergence and divergence of infinite series, differential equations, determinants, probability and mathematical physics.
His collected works, *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1882-1970), were published in 27 volumes.
He was one of the greatest of modern mathematicians.

Critério de Cauchy

$a_n \geq 0$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ =1 & \text{nada se conclui} \\ >1 & \Rightarrow \sum a_n \text{ div} \end{cases}$$

lembrando que

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

percebemos que este critério é igual ao D'Alembert...

1. Usando o critério de Cauchy estude, se possível, a natureza das séries:
   a) $\sum e^{-n}$

b) $\sum \left(\frac{1}{n^2+3}\right)^{n+3}$

c) $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$

d) $\sum \dfrac{n^n}{(\ln(n))^{2n}}$

Leibniz

(1646 -- 1716) Alemão

GAP

Gottfried Leibniz developed the present day notation for the differential and integral calculus though he never thought of the derivative as a limit. His philosophy is also important and he invented an early calculating machine.

Critério de Leibniz

$$\left.\begin{array}{r} a_n \geq 0 \\ \lim\limits_{n} a_n = 0 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ decrescente} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ conv}$$

1. Usando o critério de Leibniz estude, se possível, a natureza das séries:

   a) $\sum (-1)^n \dfrac{1}{n^2}$

b) $\sum \cos(n\pi)\dfrac{10}{n^3+7}$

c) $\sum (-1)^n n^2$

d) $\sum \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+2}$

e) $\sum (-1)^{n+7} \frac{n^3}{(n+1)!}$

2. Pode-se mostrar que a série alternada

$$\sum_{n=0} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

converge para π.

a) Use o critério de Leibniz para mostrar que a série converge.

b) Usando uma folha de cálculo faça o gráfico de algumas somas parciais e explique como é que o gráfico sugere a convergência da série.

c) Aproxime π somando a série.

d) Sabendo que o erro em usar

$$\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0$$

para aproximar $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ não é maior que a_{k+1} (com a_n um infinitésimo decrescente), quantos termos é que temos que somar para obter uma aproximação de π com 6 casas decimais correctas?

Teste moodle

Convergência Absoluta

Qual das desigualdades é verdadeira?

Risque o que não interessa:

$$\sum a_n \leq \sum |a_n|$$

$$\sum a_n \geq \sum |a_n|$$

Teorema

$$\sum |a_n| \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

1. Tendo em conta que

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$$

demonstre o teorema anterior utilizando um dos critérios.

Assim, quais as implicações verdadeiras?

Risque o que não interessa:

$$\sum |a_n| \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv}$$

$$\sum a_n \text{ conv} \Rightarrow \sum |a_n| \text{ conv}$$

$$\sum |a_n| \text{ div} \Rightarrow \sum a_n \text{ div}$$

$$\sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum |a_n| \text{ div}$$

☐ Confirmei no livro as minhas respostas.

Convergência absoluta

Uma série $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se

$$\sum |a_n|$$

for convergente.

Uma série $\sum a_n$ diz-se **simplesmente convergente** se

$$\sum a_n$$

for convergente mas

$$\sum |a_n|$$

for divergente.

2. Construa um diagrama de Venn com as séries convergentes, divergentes, com módulo convergente e com módulo divergente.

3. Estude quanto à convergência absoluta as séries:

   a) $\sum \frac{1}{1-2n^5}$

b) $\sum \dfrac{\cos(n!)}{1-2n^4}$

c) $\sum \dfrac{\cos(n^2+1)}{1-n^2}$

d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+3}$

e) $\sum \dfrac{3}{2n+5}$

Teste moodle

Majoração de Restos

1. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

a) Estude-a quanto à convergência.

b) Abra o ficheiro *somaparcial.xls* e indique o valor da soma da série com três casas decimais correctas.

Tem a certeza absoluta da sua resposta? Justifique.

Resto de ordem p

O **resto de ordem** p da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \qquad (p \in \mathbb{N})$$

Teorema

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se e só se,

$$\lim_{p \to +\infty} R_p = 0$$

Exemplo de majoração de resto

- O resto de ordem p da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é inferior a $\frac{1}{p}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
R_p &= \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&< \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n-1)(p+n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p+n-1} - \frac{1}{p+n} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_p < \frac{1}{p}$$

c.q.d.

Exemplo de majoração de resto

- Seja a_n um infinitésimo decrescente.
  O resto de ordem p da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

é, em valor absoluto, inferior a a_{p+1}.

Demonstração: (Justifique cuidadosamente todos os passos da demonstração, pág 85 do livro.)

Exemplo: Determinar o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

com um erro inferior a uma milésima.

Pelo que vimos atrás, para esta série, $R_p < \frac{1}{p}$. Como queremos um erro inferior a uma milésima, necessitamos que

$$R_p < \frac{1}{\boxed{}}$$

ou seja,

$$p = \boxed{}$$

assim, ao calcularmos

$$\sum_{n=1}^{\boxed{}} \frac{1}{n^2} = 1.64393456668159$$

temos a garantia de que este valor tem um erro inferior a uma milésima em relação à soma total da série. Ou seja, temos, pelo menos, $\boxed{}$ casas decimais correctas.

2. Utilizando uma folha de cálculo , obtenha um valor aproximado de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

com um erro inferior a uma centésima. E inferior a 5 centésimas. E inferior a 0.34.

3. Utilizando uma folha de cálculo , obtenha um valor aproximado de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$$

com um erro inferior a uma centésima. E inferior a 0.5.

4. Utilizando uma folha de cálculo , obtenha um valor aproximado de

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

com um erro inferior a uma centésima.

5. Utilizando uma folha de cálculo, obtenha um valor aproximado de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\frac{1}{e^n}$$

com um erro inferior a uma milésima.

Mapa Conceptual

Construa um mapa conceptual deste capítulo. (Usando as ferramentas de edição e o *Instantâneo* do *Adobe Reader*)

(continuação)

(continuação)

Para Praticar . . .

Daqui em diante, sempre que lhe parecer útil,
utilize o WXMaxima para fazer previsões e/ou confirmar os resultados.

Exemplo: para obter a natureza e,
caso seja convergente,
calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$,
insira: `sum(1/n, n, 1, inf), simpsum;`
seguido de Enter .

1. Estude quanto à convergência as seguintes séries numéricas.

a) $\sum \dfrac{10n^5 + 3}{n^5 + 2n}$

b) $\sum \dfrac{(n+1)!}{e^{3n}}$

c) $\sum \sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$

d) $\sum \dfrac{n+1}{3^n}$

e) $\sum \frac{cos(n!)}{n^4 - 3}$

f) $\sum (-1)^n \frac{n^2}{(2n)!}$

g) $\sum \frac{(n!)^3}{(3n+1)!}$

h) $\sum \frac{5+2^n}{10^n}$

i) $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$

j) $\sum \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{1 \times 4 \times 9 \times \cdots \times n^2}$

k) $\sum \dfrac{6 \times 8 \times 10 \times \cdots \times (2n+4)}{1 \times 16 \times 49 \times \cdots \times (3n-2)^2}$

l) $\sum \ln \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$

m) $\sum \dfrac{\arctan(n)}{n^3+3}$

n) $\sum \dfrac{(-1)^n+2}{n^3}$

o) $\sum \dfrac{\cos(na)}{1-n^2} \quad (a \in \mathbb{R})$

p) $\sum \left[\left(\dfrac{n+1}{n} \right)^n - \dfrac{2n}{n+1} \right]^{-n}$

q) $\sum \left(\dfrac{|\arctan(n)|}{n^3} \right)^n$

r) $\sum \dfrac{3n + \sin^2(n)}{2n^2 + 1}$

s) $\sum \frac{na}{an^3 + 1} \quad (a \in \mathbb{R})$

t) $\sum \frac{na^n}{n^2 + 1} \quad (a \in \mathbb{R})$

u) $\sum \left(\cos(n\pi)\frac{1}{5}\right)^n$

v) $\sum \frac{1}{e^{a^2}(n^4+1)} \quad (a \in \mathbb{R})$

x) $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

y) $\sum \dfrac{1}{n^{1+\alpha}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^{+})$

z) $\sum \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+4)^2}$

2 Considere a série

$$\sum \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

a) Mostre que é convergente.

b) Use uma folha de cálculo para determinar um valor aproximado da soma da série.

3. Represente a dízima 0.(4) como uma fracção.
Sugestão: escreva 0.(4) como uma série geométrica.

4. Represente a dízima 0.(21) como uma fracção.

5. Represente a dízima 2.34(15) como uma fracção. Sugestão: escreva 0.(4) como uma série geométrica.

6. Explique um processo para transformar qualquer dízima infinita periódica numa fracção, ou seja, que as dízimas infinitas periódicas são números racionais.

7. Se existirem, dê exemplos de séries:
   a) divergentes com termo geral que não tende para 0.
   b) divergentes com termo geral que tende para 0.
   c) convergentes com termo geral que não tende para 0.
   d) convergentes com termo geral que tende para 0.

8. Das somas parciais S_n, determine o termo geral a_n e a soma $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ da série correspondente.

   a) $S_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

   b) $S_n = 4n$

c) $S_n = \ln \dfrac{2n}{n+1}$

9. Determine as somas parciais $a_1 + a_2 + ... + a_n$ de:

   a) $a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

b) $a_n = \ln \dfrac{n}{n+1}$

c) $a_n = n$

10. As seguintes representações sugerem séries... indique um possível termo geral e estude essa série quanto à convergência.

a) $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300} + \ldots$

b) $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{105} + \dfrac{1}{110} + \ldots$

c) $\dfrac{1}{101} + \dfrac{1}{104} + \dfrac{1}{109} + \cdots$

d) $\dfrac{1}{1000000} + \dfrac{1}{1000001} + \dfrac{1}{1000002} + \cdots$

11. Construa uma série $\sum a_n$ a convergir mais rapidamente que $\sum b_n$ mas mais lentamente que $\sum c_n$ (ou seja, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, $\frac{a_n}{c_n} \to \infty$).

a) $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{1}{n^3}$

b) $b_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $b_n = \dfrac{1}{n^e}$, $c_n = \dfrac{1}{e^n}$

12. Verdadeiro ou falso? Justifique.

a) Qualquer série alternada converge.

b) $\sum a_n$ converge siplesmente se $\sum |a_n|$ diverge.

c) Uma série de termos positivos convergente é absolutamente convergente.

d) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem então $\sum (a_n + b_n)$ também converge.

e) Se $\sum a_n$ converge então $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

13. Sejam $\sum a_n$, $\sum b_n$ séries de termos positivos convergentes. Indique, se possível, a natureza das séries:

a) $\sum \dfrac{3}{2 + a_n}$

b) $\sum a_n^2$

c) $\sum \dfrac{n!(1+a_n)}{n^n}$

d) $\sum \dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n}$

13. Mostre que, se $\sum a_n$ $(a_n > 0)$ converge então $\sum sin(a_n)$ também converge.
Dê um exemplo em que $\sum \sin a_n$ converge quando $\sum a_n$ diverge.

14. Mostre que se as séries $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ forem convergentes, então a série $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente.

15. Sendo a_n uma sucessão de termos positivos indique, justificando, o valor lógico das afirmações:
    a) Se $\sum a_n$ converge então $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.
    b) Se $\sum a_n$ diverge então $\sum (a_{n+1} - a_n)$ diverge.

16. Seja $0 < a_n < b_n$ e $\sum a_n$ converge.
O que é que se pode deduzir sobre $\sum b_n$?
Dê exemplos.

17. Suponha que $b_n + c_n < a_n$ (todas sucessões positivas) e $\sum a_n$ converge. O que é que pode afirmar quanto à natureza de $\sum b_n$ e $\sum c_n$?

18. Suponha que $b_n + c_n > a_n$ (todas sucessões positivas) e $\sum a_n$ converge. O que é que pode afirmar quanto à natureza de $\sum b_n$ e $\sum c_n$?

19. Uma definição incorrecta de série convergente é:

Uma série é convergente quando a sucessão das somas parciais é limitada.

Quais das seguintes séries verificam esta definição mas não são, de facto, convergentes.

a) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$
b) $\sum \frac{1}{n}$
c) $\sum (-1)^n$
d) $\sum (1)^n$

20. Para cada uma das seguintes situações justifique se $\sum c_n$ converge, diverge ou se não se pode concluir sem mais informação.

a) $0 \leq c_n \leq \dfrac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

b) $\dfrac{1}{n} \leq c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

c) $0 \leq c_n \leq \dfrac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

d) $\dfrac{1}{n^2} \leq c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

e) $\dfrac{1}{n^2} \leq c_n \leq \dfrac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

21. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

onde

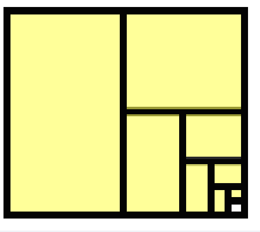
$$a_n = \begin{cases} n^{50n} \Leftarrow & n < 10^{10} \\ \dfrac{1}{n^{10}} \Leftarrow & n \geq 10^{10} \end{cases}$$

Estude-a quanto à convergência.

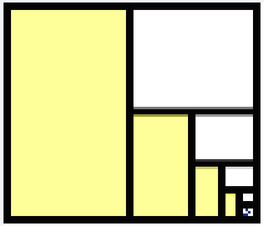
22. Consegue encontrar uma série que ninguém na sala, nem alunos nem professor, consiga decidir se é convergente?

Aplicações

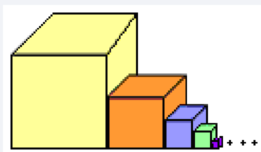
1. A figura seguinte mostra um quadrado de lado 1.
   Dividiu-se esse quadrado ao meio e coloriu-se metade.
   A que sobrou dividiu-se ao meio e coloriu-se metade.
   A que sobrou dividiu-se ao meio e coloriu-se metade.
   E assim sucessivamente...
   Mostre usando séries que a soma das áreas destes rectângulos é 1.



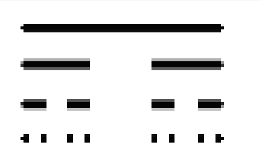
2. Determine a área a colorido, construída num quadrado de lado 1, como mostra a figura:



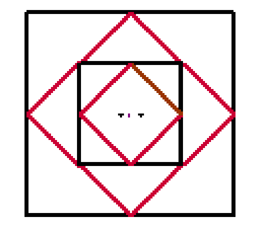
3. A figura seguinte mostra uma escada infinita construída com cubos.
   Determine o volume total da escada
   sabendo que o maior cubo tem lado 1
   e cada cubo tem como lado metade do lado do cubo precedente.



4. **Conjunto de Cantor**
Pegue no Intervalo [0,1],
apague o intervalo]1/3, 2/3[
(dividindo o intervalo em 3- apague o terço do meio),
depois apague]1/9, 2/9[e]7/9, 8/9[
(dividindo os intervalos em 3- apague o terço do meio)
continue este processo...
Qual é a soma dos comprimentos dos intervalos que foram apagados?



5. Comece com um quadrado com 4 unidades de lado.
   Una os pontos médios do quadrado para formar um novo quadrado dentro do primeiro. Então una os pontos médios do quadrado de dentro para formar o terceiro e continue...
   Qual é a soma das áreas destes quadrados?



6. Uma bola é atirada de uma altura de 10m. Em cada instante toca no chão e volta a subir a uma altura que é $\frac{3}{4}$ da altura anterior. Determine a distância total que a bola percorrerá admitindo que ela volta a subir muitas vezes.

7.a) Este problema trata da questão de estimar o efeito cumulativo da descida dos impostos na economia de um país.

Supondo que o governo propõe uma descida de impostos totalizando 100 milhões de euros.

Supondo que as pessoas que têm dinheiro extra gastam 80% e guardam 20%.

Então a receita extra gerada pela descida de impostos, 100x0.8=80 milhões de euros será gasta, torna-se uma nova receita para outra pessoa.

Assuma que essa pessoa também gastará 80% da sua receita adicional, ou seja 80x0.8 milhões de euros, e assim por diante.

Calcule o total de gastos adicionais gerados pela descida dos impostos.

7.b) Suponha que o governo faz um corte de impostos de 10 milhões de euros.

Suponha que cada pessoa gasta 93% do que recebe a mais e guarda o resto.

Estime o efeito total do corte dos impostos na economia.

7.c) Resolva o exercício anterior supondo que o gasto das pessoas é de 95% e veja qual é o efeito de uma taxa de poupança ligeiramente menor.

7.d) Calcule o efeito de um corte de impostos de 20 milhões quando a taxa de poupança é de 2%.

8. Pacientes com certos problemas cardíacos são, muitas vezes, tratados com digitocina, um derivado da planta digitalis.

   A taxa *a* que o corpo humano elimina a digitocina é proporcional à quantidade de digitocina presente.

   Num dia (24horas) aproximadamente 90% da quantidade existente é eliminada.

   Suponha que é dada diariamente uma dose de manutenção de 0.05 mg ao paciente.

   Estime a quantidade total de digitocina existente no paciente ao fim de vários meses de tratamento.

9. Um paciente toma diariamente 6 mg de um certo medicamento.

   Cada dia o corpo elimina 30% da quantidade de medicamento existente no corpo humano.

   Estime a quantidade total de medicamento existente no organismo após um extenso tratamento, imediatamente a seguir a uma dose ser tomada.

10. Um paciente toma diariamente uma dose de M mg de um certo medicamento.

    Cada dia o corpo elimina uma fracção q da quantidade de medicamento existente no corpo humano.

    Estime a quantidade total de medicamento existente no organismo após um extenso tratamento, imediatamente a seguir a uma dose ser tomada.

11. Chama-se perpetuidade a uma sucessão de pagamentos que continua para sempre.

    Chama-se valor capital da perpetuidade à soma dos valores de todos os futuros pagamentos.

    Considere uma perpetuidade que pretende pagar 100 no início de cada mês.

    Suponha que a taxa de juro é de 12% ao ano mas calculada mês a mês.

    a) Qual o valor dos 100 após os dois meses?
    b) E após 3 meses?
    c) E após k meses?
    d) Expresse o valor capital como uma série.
    e) Calcule a soma da série.

12. Pergunte a um colega que saiba tocar música qual a relação entre a série harmónica e os *harmonicos*.

Teste moodle

Bibliografia

Bibliografia*

- José Alberto Rodrigues.
  Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
  Edições Colibri, 2007.
- Salas, Hille, and Etgen.
  Calculus: One variable.
  John Wiley Sons, Inc., 9th edition, 2003.
- Dale Varberg and Edwin J. Purcell.
  Calculus.
  Prentice-Hall, Inc., 7th edition, 1997.
- Howard Anton.
  Cálculo: um novo horizonte, volume 1.
  Bookman, 6th edition, 1999.
- Larry J. Goldstein, David C. Lay, and David I. Schneider.
  Calculus and its applications.
  Prentice-Hall, Inc., 5th edition, 1990.
- Roland Larson, Robert Hostetler, and Bruce C. Edwards.
  Calculo y geometria analitica, volume 1.
  McGraw-Hill, 5th edition, 1995.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.

Referências

- Heath, T.L.(1921). *A history of greek mathematics (Vol. 1)*, Oxford, UK: Oxford University Press.

Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)