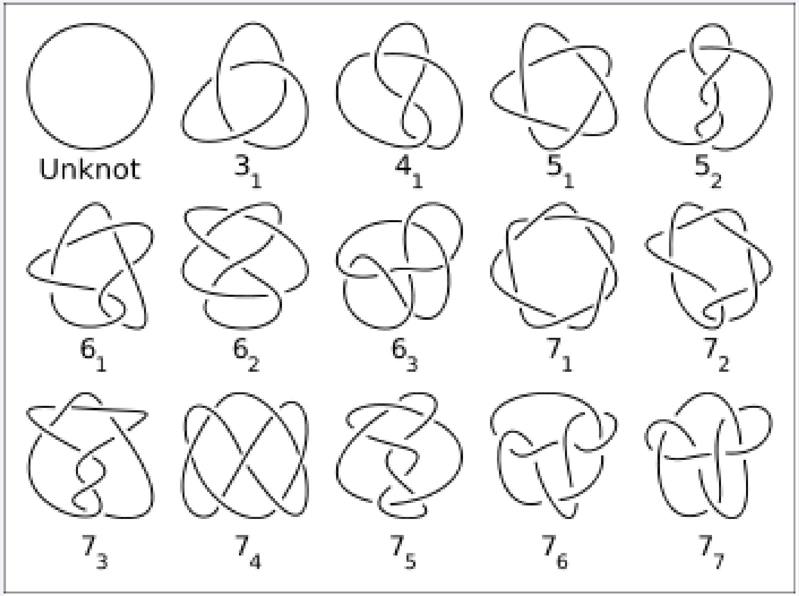
Capítulo 05: Topologia



Sandra Gaspar Martins

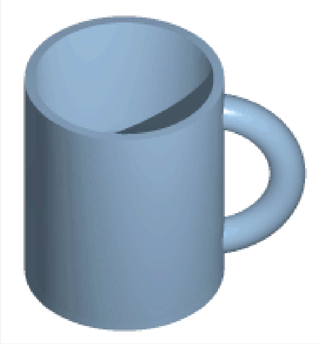
25/10/2009

Introdução

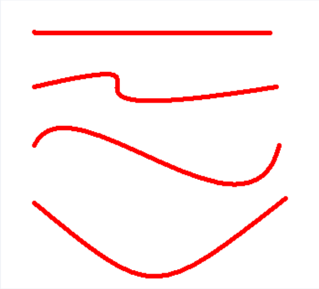
In topology, a sphere is the same as a cube, and a doughnut is the same as a coffee cup. It does not deal with the rigid properties of objects, such as length and angles, but instead the properties that no amount of bending, twisting, stretching, or shrinking can change.

de http://library.thinkquest.org/12295/main.html

Vejamos a deformação do *donut* numa chávena de café...



Neste capítulo vamos estudar topologia em $\mathbb{R}$
ou seja,
estudar propriedades da recta dos reais que se mantêm
se essa recta deixar de estar esticada, recta
e se passar a deformar: enrolar, encurvar, alongar... como uma corda...
(tecnicamente: se for transformada por um homeomorfismo).



Uma das aplicações da Topologia é a *Teoria de nós* que tem aplicação directa:

Na Biologia molecular

The basic genetic material of life on earth took the shape of DNA ManipulationsDNA's double helix from there the possibilities of the marriage of knot theory and Deoxyribonucleic Acid (DNA) were endless. What was also found was that DNA often becomes knotted, making it difficult for DNA to carry out its function. There are enzymes called topoisomerases that can perform topological manipulations on DNA. Scientists let these enzymes act on circular DNA performing actions like those illustrated here so that they can then study the function of the enzymes from the resulting knots in the circular DNA. The circular DNA is used because if open-ended DNA is used, the knots cannot be observed, as the ends are free. This is just one of the exciting applications of knot theory in the world of molecular biology.

Na Mecânica estatística

Vaughan Jones discovered the connection when computing a new polynomial invariant for knots. In this field, knots can used to represent systems and thereby increase the ease of the study.

Na Química molecular

Na Física das partículas

No dia a dia...

de http://library.thinkquest.org/12295/main.html

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- identificar o interior, exterior, fronteira, derivado e aderência de um qualquer conjunto de números reais;
- verificar se um conjunto é aberto ou fechado;
- estudar uniões e intersecções de infinitos intervalos;
- encontrar exemplos de conjuntos com determinadas propriedades topológicas.

Competências globais

Também deve:

- escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- justificar os raciocínios;
- compreender e utilizar a linguagem matemática;
- utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (nestes, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a]Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Definições

Vizinhança

Dado $a \in \mathbb{R}$,
chama-se

vizinhança de raio ϵ de a,
ou
vizinhança ϵ de a

representando-se por

$$V_\epsilon(a)$$

ao conjunto

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\} \\ = &\{x \in \mathbb{R} : -\epsilon < x - a < \epsilon\} \\ = &]a - \epsilon, a + \epsilon[\end{aligned}$$

com $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Trata-se por conseguinte do conjunto formado pelos reais x que estão a uma distância de a menor do que ϵ.

1. Faça um esboço gráfico do que significa uma vizinhança de raio ϵ de a.

2. Indique na forma de intervalo e com um esboço gráfico o que significa:
   a) A vizinhança de raio 1 de 5.
   b) $V_{0.1}(3)$

c) $V_5(-2)$

d) $|x-5|<1$

Seja A um conjunto de números reais.

Definições

Ponto interior de A:

É um ponto $x \in A$ para o qual **existe** uma vizinhança de x **contida em** A.

Ponto fronteiro de A:

É um ponto $x \in I\!R$ para o qual **qualquer** vizinhança de x **intersecta** A **e o seu complementar.**

Ponto exterior de A:

É um ponto $x \in I\!R$ para o qual **existe** uma vizinhança de x **contida no complementar de** A.

Ponto aderente do conjunto A:

É um ponto $x \in I\!R$ que é **interior ou fronteiro** de A, ou seja, qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto de A.

Ponto de acumulação do conjunto A:

É um ponto $x \in I\!R$ para o qual **qualquer** vizinhança de x contém **pelo menos um ponto de** A **distinto do próprio** x.

Ponto isolado de A:

É qualquer ponto **fronteiro que pertença a** A e que **não seja ponto de acumulação**.

Definições

Interior de A: É o conjunto dos pontos interiores de A, representando-se por **int**(**A**) $= \overset{o}{A}$.

Fronteira de A: É o conjunto dos pontos fronteiros de A, representando-se por **fr**(**A**).

Exterior de A: É o conjunto dos pontos exteriores de A, representando-se por **ext**(**A**).

Aderência de A, ou fecho de A: É o conjunto reunião entre os conjuntos fronteira e interior de A, representando-se por $\overline{A}$.

Derivado de A: É o conjunto dos pontos de acumulação de A, representando-se por $\mathbf{A}'$.

Definições

A é aberto se $A = int(A)$.
A é fechado se $A = \overline{A}$.

3. Caracterize topologicamente os conjuntos:

a) $A = [2, 7[$

b) $B = \{-10, 2\} \cup [4, +\infty[$

c) $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $D = [0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$

e) $E =]-\infty, 0[\cup \left\{ \frac{2n}{n+5} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left([\pi, \sqrt{26}] \cap \mathbb{Q} \right)$

Proposições

- $intA \,\dot{\cup}\, frA \,\dot{\cup}\, extA \; \boxed{\qquad\qquad} \; \mathbb{R}$
- Todo o ponto de acumulção de A que não pertence a A é ponto $\boxed{\qquad\qquad}$
- Todo o ponto fronteiro de A que não pertence a A é ponto $\boxed{\qquad\qquad}$
- Todo o conjunto não vazio majorado e fechado tem $\boxed{\qquad\qquad}$
- Todo o conjunto não vazio minorado e fechado tem $\boxed{\qquad\qquad}$
- $\overline{A} \; \boxed{\qquad\qquad} \; A' \cup \{\text{pontos isolados}\}$
- $A' \; \boxed{\qquad\qquad} \; \overline{A}$
- $A \cup A' \; \boxed{\qquad\qquad} \; \overline{A}$

Proposições

- A intersecção de dois conjuntos abertos é um conjunto ______.
- A intersecção de dois conjuntos fechados é um conjunto ______.
- A reunião de dois conjuntos abertos é um conjunto ______.
- A reunião de dois conjuntos fechados é um conjunto ______.
- A reunião infinita de conjuntos abertos é um conjunto ______.
- A intersecção infinita de conjuntos fechados é um conjunto ______.

4. Escreva na forma de um intervalo.
   Sug: Represente alguns intervalos na recta dos Reais.

   a) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{n}\right[$

   b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{n}\right[$

c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n},4-\frac{1}{n}\right]$

d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n},4-\frac{1}{n}\right]$

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Seja $A \subset \mathbb{R}$, limitado e com um número infinito de pontos, então existe pelo menos um ponto de acumulação de A.

5. Pode garantir a exitência de um ponto de acumulação do conjunto $A = \left\{ \frac{4n}{1-2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$? Indique-o.

Definição

Um conjunto A diz-se **denso** no conjunto B se $\overline{A} = B$.

6. Indique exemplos de conjuntos densos em
   a) $\mathbb{R}$
   b) $[0, 1]$

Mapa Conceptual

Construa um mapa conceptual deste capítulo. (Usando as ferramentas de edição e o *Instantâneo* do *Adobe Reader*)

(continuação)

(continuação)

Para Praticar . . .

1. Indique o interior, a fronteira, a aderência, o derivado e os pontos isolados do conjunto. Indique se é aberto ou fechado.

   a) $[0,1[\cup]4,6[\cup\{7,8\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 < 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : \quad 0 < |x - 2| \leq 6\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x^3 > x\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : \quad x - 3 \geq x\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} : \quad |x - 2| \geq |x|\}$

g) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x}{x-2}\right\}$

h) $[2, 3] \cap \mathbb{Q}$

i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \quad x = \dfrac{n+1}{2n+3}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

j) $[\sqrt{2}, \pi] \cap \mathbb{Q}$

2. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja:
   a) finito, não vazio e aberto;
   b) fechado mas não limitado;
   c) igual ao seu derivado;
   d) igual à sua fronteira;
   e) finito mas não majorado;
   f) tenha como exterior um intervalo limitado.

Bibliografia*

- José Alberto Rodrigues.
  Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
  Edições Colibri, 2007.
- Jaime Campos Ferreira.
  Introdução à análise matemática.
  Fundação Calouste Gulbenkian, 3rd edition, 1990.
- Ana Sá and Bento Louro.
  Análise matemática 1: Teoria e exercícios.
  Available from `https://nebm.ist.utl.pt/repositorio/ficheiros/131`, 2005.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.????????????

Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)