Capítulo 07: Diferenciabilidade

Sandra Gaspar Martins
03/05/2011

Introdução

Como podemos medir a velocidade de um objecto num instante????

Ou, de uma forma ainda mais fundamentalista...

O que significamos com o termo *velocidade*???

Esta discussão leva-nos a um conceito fundamental em Análise Matemática...

O conceito de *derivada*!!!

A derivada indica-nos a forma como varia uma dada grandeza...

Pode ser interpretada como o declive de uma curva, uma taxa de variação, uma velocidade...

Neste capítulo vamos estudar derivadas de funções reais de variável real

ou seja,

vamos estudar a forma como variam essas funções...

a intensidade com que variam e se aumentam ou diminuem...

Vamos estudar como variam as funções básicas (chegaremos a uma tabela de derivadas)...

E como determinar a variação de funções mais complexas utilizando a variação das funções básicas...

Vamos ver como estimar variações utilizando a derivada (diferencial)...

Vamos descobrir que informação podemos retirar de uma função conhecendo a sua derivada... máximos, mínimos, pontos de inflexão...

Vamos perceber que, com o auxílio da derivada podemos ter um conhecimento muito profundo de uma função podendo até esboçar o seu gráfico com muito rigor...

As aplicações da derivada são infinitas:

Na Engenharia Civil:

- A intensidade dos tremores de um terramoto.
- A variação do peso exercido num dado momento no tabuleiro da ponte 25 de Abril em função do número de carros que a atravessam.
- A variação da quantidade de água na barragem de Castelo de Bode em função da pluviosidade...
- A variação na deflexão de uma viga sujeita a um certo peso em função do ponto da viga...
- A variação da dilatação de um prego provocada por aquecimento em função da temperatura...

Na Economia:

- Flutuações nas taxas de juro.
- A taxa inflação de um país.
- A variação de preço de um apartamento na baixa lisboeta em função da sua área.

Na Biologia:

- A taxa de variação do número de animais existentes de uma espécie em vias de extinção em função da quantidade de alimento disponível...

Na Física:

- A velocidade de um objecto em função do tempo...
- A variação do comprimento da aresta de um cubo em função do seu volume.

Na Medicina:

- A variação no volume de sangue no corpo de uma pessoa em função do seu peso.
- A variação da quantidade de um medicamento existente no nosso corpo em função do tempo...
- A variação do número de bactérias numa cultura...

...

está sempre presente no nosso dia-a-dia...

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- ☐ encontrar exemplos de funções cuja derivada tenha determinadas características;
- ☐ calcular a derivada de funções definidas por uma só expressão ou definidas por ramos;
- ☐ estimar a variação num dado parâmetro utilizando diferenciais;
- ☐ aplicar os teoremas de diferenciabilidade para obter informações sobre uma função;
- ☐ determinar os extremos e os pontos de inflexão de uma função;
- ☐ fazer um esboço preciso de uma função;
- ☐ aplicar as várias interpretações de derivada;
- ☐ reconhecer a utilização de derivadas em problemas de aplicação prática e utilizar os seus conhecimentos sobre derivadas para os resolver.

Competências globais

Também deve:

- ☐ escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- ☐ justificar os raciocínios;
- ☐ compreender e utilizar a linguagem matemática;
- ☐ utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- ☐ formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- ☐ fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (n290es, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ☐ ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a] Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Consideremos, em tudo o que se segue, que as funções envolvidas são funções reais de variável real.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

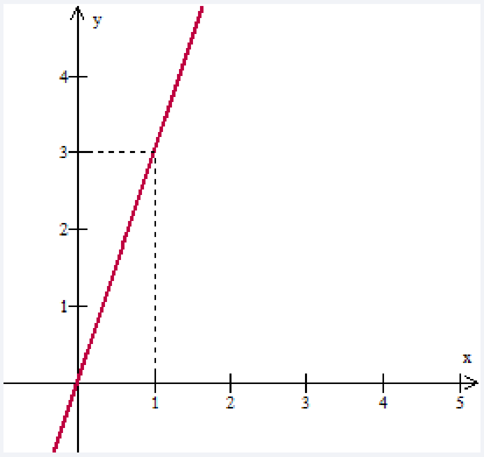
fazer mais exerc com arcsin, arctan,...
juntar $u^v natabeladerivadas$

Definição de derivada....

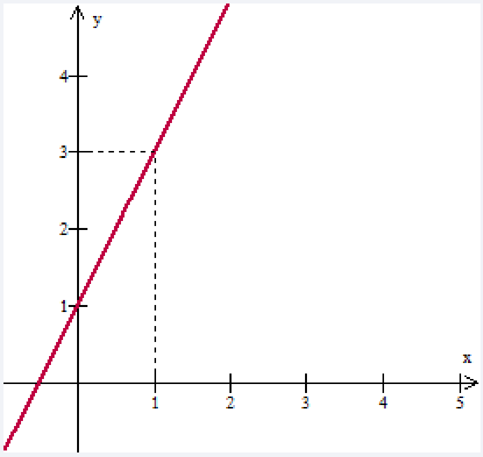
Declive

Determine o declive das rectas:

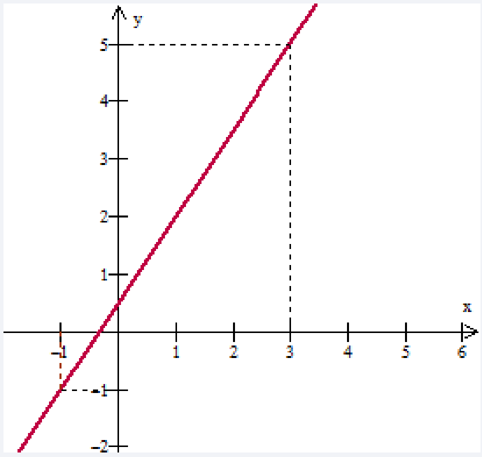
r :



s :

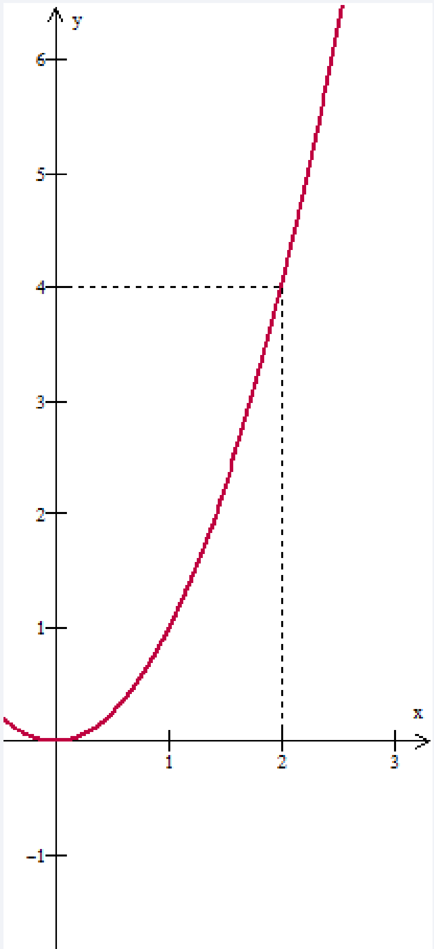


t :



Considere a função

$$f(x) = x^2.$$



- Qual o significado de $\frac{(2.3)^2-2^2}{2.3-2}$?
  É o ____ da recta ____ ao gráfico de f que passa em $f($____$)$ e $f($____$)$. Faça um esboço dessa recta.
- E de $\frac{(2.1)^2-2^2}{2.1-2}$?
  É o ____ da recta ____ ao gráfico de f que passa em $f($____$)$ e $f($____$)$. Faça um esboço dessa recta.
- E de $\frac{(2.01)^2-2^2}{2.01-2}$?
  É o ____ da recta ____ ao gráfico de f que passa em $f($____$)$ e $f($____$)$. Faça um esboço dessa recta.
- E de $\frac{(1.99)^2-2^2}{1.99-2}$?
  É o ____ da recta ____ ao gráfico de f que passa em $f($____$)$ e $f($____$)$. Faça um esboço dessa recta.
- E de $\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}$ com h um número real "pequeno"?
  É o ____ da recta ____ ao gráfico de f que passa em $f($____$)$ e $f($____$)$. Faça um esboço dessa recta.

Qual o significado de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}$?

E, em geral, para uma função real de variável real f e um ponto a no interior do domínio de f, qual o significado geométrico de

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/limsec/limsec.html

Derivada de f no ponto a

Uma função real de variável real f diz-se **derivável** ou **diferenciável** num ponto a no interior do domínio de f, se for finito o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Nesse caso, chama-se a esse limite a **derivada de f no ponto a** e representa-se por

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{df}{dx}(a) = Df(a) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

1. Calcule, por definição:
   a) $f'(2)$ sendo $f(x) = x^2 + x$.
   b) $f'(3)$ sendo $f(x) = e^x + 3$.

c) $f'(0)$ sendo $f(x) = \sin(x)$.

d) $f'(0)$ sendo $f(x) = |x|$.

e) $f'(0)$ sendo $f(x) = (x + |x|)^2 + 1$.

f) $f'(0)$ sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Teorema

Se uma função f é derivável no ponto a então f é contínua em a.

Demonstração:
Tenha em conta que $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x - a)$.

2. Estude quanto à continuidade e derivabilidade as seguintes funções no ponto indicado.
   a) $f(x) = |x|$ em $x = 0$.

b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & se \quad x\geq 0 \\ 1 & se \quad x<0 \end{cases}$ em $x=0$.

$f(x)=\begin{cases} x^2 & se \quad x\geq 0 \\ 0 & se \quad x<0 \end{cases}$ em $x=0$.

3. Em t segundos uma partícula move-se s metros desde o ponto de partida, com $s = 5t^2$.
   a) Calcule a velocidade média entre $t = 1$ e $t = 1 + h$ se:
      a1) $h = 0.1$;
      a2) $h = 0.01$;
      a3) $h = 0.001$.
   b) Use as respostas à alínea a) para estimar a velocidade instantânea da partícula no instante $t = \boxed{}$.

4. A tabela que se segue mostra a distância d, que um carro percorreu numa viagem, em função do tempo t, desde que a viagem começou.

$t(horas)$	0	1	2	3	4	5
d (distância)	0	45	135	220	300	400

   a) Calcule a velocidade média entre 2 e 3.

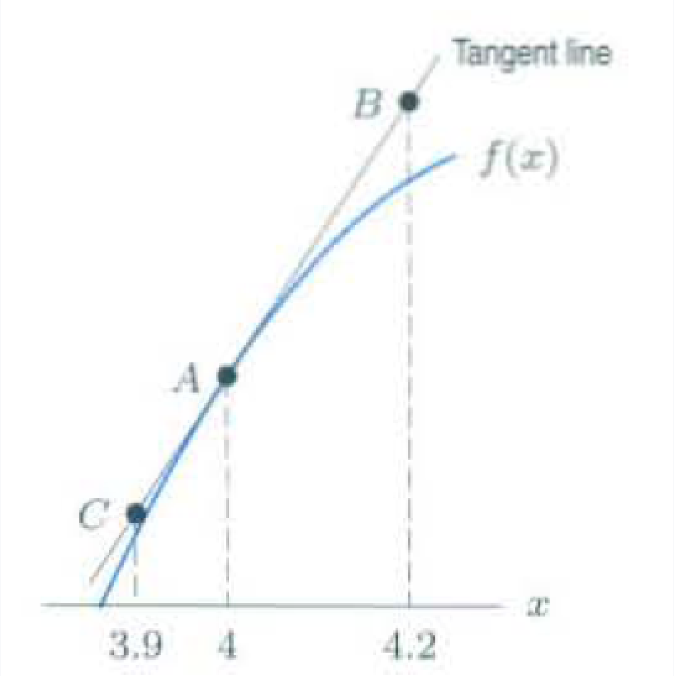
   b) Calcule a velocidade média entre 2 e 5.

5. Um carro é conduzido a velocidade constante. Faça um esboço do gráfico da distância que o carro percorreu como função do tempo.

6. Um carro é conduzido a velocidade crescente. Faça um esboço do gráfico da distância que o carro percorreu como função do tempo.

7. Um carro é conduzido a grande velocidade, depois a sua velocidade decresce lentamente. Faça um esboço do gráfico da distância que o carro percorreu como função do tempo.

8. Para a função f representada na figura seguinte tem-se que $f(4) = 25$ e $f'(4) = 1.5$. Determine as coordenadas dos pontos A,B e C.



Regras de derivação...

Regras de derivação

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

$$(k)' = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(x)' = 1$$

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a) \qquad a \in \mathbb{R}' \setminus \{1\}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \sec^2(x)$$

$$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$$

$$(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arccot(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Vamos confirmar, por definição....

1. Prove, por definição:

   a)

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

   b)

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

c)

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

d)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

e)

$$(k)' = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

f)

$$(x)' = 1$$

g)

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

h)

$$\left(x^3\right)' = 3x^2$$

i)

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

j)

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

k)

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

l)

$$(e^x)' = e^x$$

m)

$$(a^x)' = a^x \ln(a) \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

3. Relembrando que

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

e que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

mostre que:

a)

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

b)

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

c)

$$(\tan(x))' = \sec^2(x)$$

d)

$$(\cot(x))' = -\csc^2(x)$$

e)

$$(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$$

Derivação da função composta

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ derivável em } a \\ g \text{ derivável em } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} h = gof \\ \text{é derivável em } a \end{array}$$

e

$$(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

1. $\left(sin(x^2)\right)' = ...$

2. $\left(\ln(x^2 + 3x)\right)' = ...$

Demonstração:

$$(gof)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = \ldots$$

3. Dado $r(2) = 4$, $s(2) = 1$, $r'(2) = -1$, $s'(2) = 3$ e $s'(4) = 3$. Calcule as seguintes derivadas ou indique a informação de que necessitaria para a calcular.
   a) $H'(2)$ se $H(x) = r(x).s(x)$
   b) $H'(2)$ se $H(x) = \sqrt{r(x)}$
   c) $H'(2)$ se $H(x) = r(s(x))$
   d) $H'(2)$ se $H(x) = s(r(x))$

4. Se $g(2) = 3$ e $g'(2) = -4$, calcule $f'(2)$ nos seguintes casos:
   a) $f(x) = x^2 - 4g(x)$
   b) $f(x) = \frac{x}{g(x)}$
   c) $f(x) = x^2 g(x)$
   d) $f(x) = (g(x))^2$
   e) $f(x) = x \sin(g(x))$
   f) $f(x) = x^2 \ln(g(x))$
   g) Para cada uma das alíneas anteriores determine a equação da recta tangente a f no ponto $x = 2$.

Derivação da função inversa

Seja f uma função derivável e injectiva em $]b, c[$, $a \in]b, c[$, $f'(a) \neq 0$ então f^{-1} é derivável em $f(a)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

1. $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}^+$
   $f^{-1}(x) = ...$
   $f'(3) = ...$
   $\left(f^{-1}\right)'(f(3)) = ...$

Ilustre...

Demonstração: $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ ...

2. Use o teorema da função inversa para mostrar que:

   a) $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   b) $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

d) $((x))' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Tabela de derivadas...

Tabela de derivadas

Sejam $u = f(x),\ v = g(x),\ k \in \mathbb{R}$.

$k' = 0$	$(\sin(u))' = \cos(u)u'$
$x' = 1$	$(\cos(u))' = -\sin(u)u'$
$(u+v)' = u' + v'$	$(\tan(u))' = \sec^2(u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(\cot(u))' = -\csc^2(u)u'$
$(u.v)' = u'v + uv'$	$(\sec(u))' = \sec(u)\tan(u)u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\arcsin(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u',\ \alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$(\arccos(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\arctan(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$	$(arccot(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
$(e^u)' = e^u u'$	$(\lvert u\rvert)' = \dfrac{\lvert u\rvert}{u}u' = \dfrac{u}{\lvert u\rvert}u'$
$(a^u)' = a^u\ln(a)u',\ a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$	
$(u^v)' = u^v\ln(u)v' + vu^{v-1}u'$	

Daqui em diante, sempre que lhe parecer apropriado,
confirme que obteve a expressão correcta para a derivada utilizando, por exemplo, o WXmaxima .

Nota:
para calcular a 1ª derivada
de $\ln(\sqrt{x^{2\pi+1}} - e^x)$ introduza:
diff(log(sqrt(x∧(2*(% pi+1)))-$e \wedge x$),x,1);
seguido de SHIFT+ENTER.

1. Calcule:
   a) $\left(\cos(e^{2x+3})\right)'$
   b) $(e^{-x}\ln(\sqrt{x+2}))'$

c) $\left(x^5 - \sin(3x-2)\right)'$

d) $\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}}\right)'$

e) $\left(xe^{\tan(x)}\right)'$

f) $\left(t\cos(\sqrt{t}e^{t})\right)'$

g) $\left(e^{2x}\sin^2(3x)\right)'$

h) $\left(e^{k\theta-1}\right)'$, $(k\in\mathbb{R})$.

i) $\left(\tan^2(2+3\alpha)\right)'$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

j) $\left(\sqrt[3]{\cos^2(y)+3+\sin^2(y)}\right)'$

k) $\left(\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)(2x^3 + 4)\right)'$

l) $(\tan(\arctan(2\alpha)))'$

2. Calcule:

   a) $f'(2)$, sendo $f(x) = \ln(x) + 3x$.

   b) $f'(3\pi)$, sendo $f(x) = \tan(x + \pi) - 2x^2$.

3. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = 5x^2$ no ponto $x = 10$.

4. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no ponto $(1, 1)$.

5. Considere a função $f(x) = \sin(x)$.

a) Observe a tabela seguinte, na qual o seno foi calculado em radianos.

Modelo Matemático

$$m = \frac{(\sin(h) - 0)}{h}$$

Tabela

h	m
1.000000000000	0.841470984808
0.100000000000	0.998334166468
0.010000000000	0.999983333417
0.001000000000	0.999999833333
0.000100000000	0.999999998333
0.000010000000	0.999999999983
0.000001000000	1.000000000000
0.000000100000	1.000000000000
0.000000010000	1.000000000000
0.000000001000	1.000000000000
0.000000000100	1.000000000000

Desta figura tem-se que uma estimativa da derivada da função seno, em radianos, no ponto ____ é ____.

b) Observe a tabela seguinte, na qual o seno foi calculado em graus.

Modelo Matemático

$$m = \frac{(\sin(h) - 0)}{h}$$

Tabela

h	m
1.000000000000	0.017452406437
0.100000000000	0.017453283659
0.010000000000	0.017453292431
0.001000000000	0.017453292519
0.000100000000	0.017453292520
0.000010000000	0.017453292520
0.000001000000	0.017453292520
0.000000100000	0.017453292520
0.000000010000	0.017453292520
0.000000001000	0.017453292520
0.000000000100	0.017453292520

Desta figura tem-se que uma estimativa da derivada da função seno, em graus, no ponto ____ é ____.

c) Calcule $f'(0)$ pelas regras de derivação.

d) Na alínea anterior utilizou graus ou radianos?

c) Calcule $f'(0)$ pelas regras de derivação.

d) Na alínea anterior utilizou graus ou radianos?

É por isto que se utiliza, por defeito, a função seno (e todas as trigonométricas) em radianos... porque a relação entre x e $\sin(x)$ é muito mais simples em radianos do que em graus... Em radianos tem-se que $(\sin(x))' = \cos(x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$,... enquanto que em graus estas relações são muito mais complicadas...

Derivadas laterais...

Derivadas laterais

Derivada lateral de f à direita de a

$$f'\left(a^{+}\right) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada lateral de f à esquerda de a

$$f'\left(a^{-}\right) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nota: Se ambos os limites existirem e forem iguais então $f'(a) = f'\left(a^{-}\right) = f'\left(a^{+}\right)$.

http://www.ies.co.jp/math/java/calc/limrl/limrl.html

1. Calcule a derivada de f nos pontos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \geq 3 \\ 9x+1 & se \quad x < 3 \end{cases}$
em $x = 3$ e em $x = 0$.

b) $f(t) = \begin{cases} t^2+2 & se \quad t \geq 0 \\ 2 & se \quad t < 0 \end{cases}$ em $t = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x > 1 \\ -x^3 & se \quad x \leq 1 \end{cases}$ em $x = 1$.

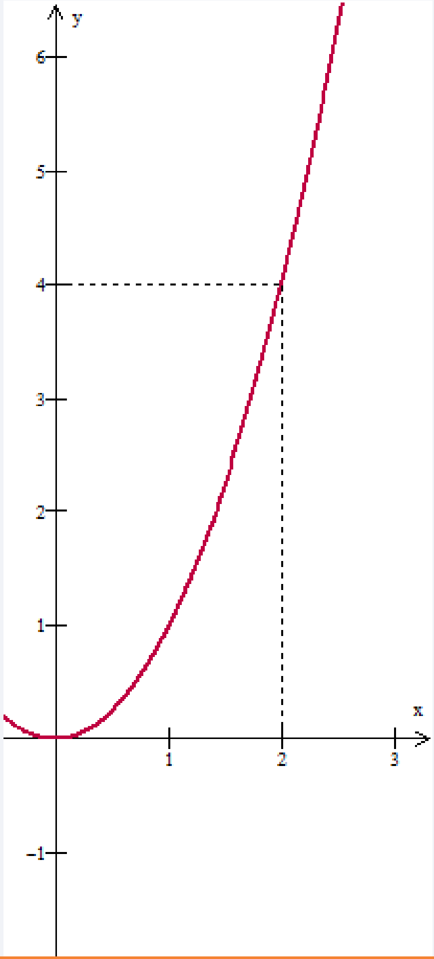
d) $f(x) = |2x - 4|$ em $x = 2$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$.
   Para $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{x}} + 2}$.
   Determine $f'(0)$.

Taxa de variação

Considere a função

$$f(x) = x^2.$$



- $\frac{(2.3)^2-2^2}{2.3-2}$ pode ter outro significado...
  para além de representar o declive da recta secante...

  ... indica-nos a taxa de variação da função f
  entre os pontos $\boxed{}$ e $\boxed{}$,
  ou seja, quanto varia a função f,
  entre $\boxed{}$ e $\boxed{}$, por cada unidade.

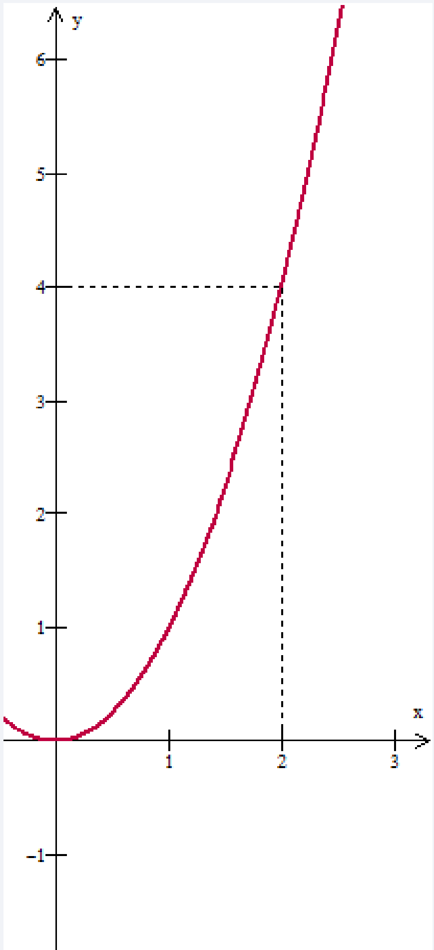
  Ou seja, como $\frac{(2.3)^2-2^2}{2.3-2} = \frac{5.29-4}{2.3-2} = \frac{1.29}{0.3} = \frac{4.3}{1}$,
  a função x^2 varia 1.29 por cada 0.3 unidades,
  portanto 4.3 por cada unidade.

- O significado de $\frac{(2.1)^2-2^2}{2.1-2}$ é...?
  ... a taxa de variação da função f entre os pontos $\boxed{}$ e $\boxed{}$, ou seja, quanto varia a função f, entre $\boxed{}$ e $\boxed{}$, por cada unidade.

  Ou seja, como $\frac{(2.1)^2-2^2}{2.1-2} = \frac{4.41-4}{2.1-2} = \frac{0.41}{0.1} = \frac{4.1}{1}$,
  a função x^2 varia $\boxed{}$ por cada 0.1 unidades,
  portanto $\boxed{}$ por cada unidade.

Continuando com a função

$$f(x) = x^2.$$



O significado de $\frac{(2.01)^2-2^2}{2.01-2}$ é...?

... a taxa de variação da função f entre os pontos $\boxed{\quad}$ e $\boxed{\quad}$, ou seja, quanto varia a função f, entre $\boxed{\quad}$ e $\boxed{\quad}$, por cada unidade.

Ou seja, como $\frac{(2.01)^2-2^2}{2.01-2} = \frac{4.0401-4}{2.01-2} = \frac{0.0401}{0.01} = \frac{0.401}{1}$,
a função x^2 varia $\boxed{\quad}$ por cada 0.01 unidades,
portanto $\boxed{\quad}$ por cada unidade.

O significado de $\frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-2}$ é...?

... a taxa de variação da função f entre os pontos $\boxed{\quad}$ e $\boxed{\quad}$, ou seja, quanto varia a função f, entre $\boxed{\quad}$ e $\boxed{\quad}$, por cada unidade.

Ou seja, como $\frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-2} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h}$,
a função x^2 varia $\boxed{\quad}$ por cada h unidades.

Taxa de variação

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

é a **taxa de variação média** de f entre o ponto a e o ponto $a+h$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

é a **taxa de variação instantânea** de f no ponto a.

Diferencial...

Diferencial

Diferencial

$$f(x) - f(a) \approx \underbrace{f'(a)(x-a)}_{\substack{df \\ \text{diferencial de } \mathbf{f}}} \quad \text{para } x \text{ "próximo" de } a.$$

Ilustre...

1. A área de um círculo depende do raio do círculo: $A = \pi r^2$. Um círculo com raio de 3 cm tem área de $\boxed{}$ cm^2. Um aumento de 1 mm no raio provocará um aumento de, aproximadamente, quantos mm^2 na área?

2. A aresta de um depósito de forma cúbica sofre, por aquecimento, uma variação de medida de 100 para 100.001 cm. Qual o volume final do depósito?

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em que $f(5) = 10$ e $f'(5) = 12$. Determine um valor aproximado de $f(5.2)$.

4. Seja $f(x) = \ln(x) + x^2$, usando diferenciais, encontre um valor aproximado de $f(1.2)$.

Teorema de Rolle e de Lagrange...

Pierre de Fermat

(1601—1665) Francês

Considerado o **Príncipe dos amadores**, Pierre de Fermat nunca teve formalmente a matemática como a principal actividade de sua vida. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas as suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Pascal o maior matemático de seu tempo.[a]

[a] http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

O famoso Últ
Este teorema
simples:

não existe par
inteiro, positiv
O teorema foi
de Diofante, s
demonstraçã
proposição, r
para contê-la

Naturalmente,
a verdade. Ge
amaldiçoado a
Por mais de tr
grandes expoe
Euler e Gauss
Com o advent
milhões de alg
x, y, z e n e a
empiricament
razão. **Mas e**

O teorema de
mundo durant
conseguisse c

Ponto crítico

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $c \in]a, b[$.
Diz-se que c é um **ponto crítico** de f se $f'(c) = 0$.

Teorema de Fermat

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.
Se existir um ponto c em $]a, b[$ onde a função atinge um extremo (máximo ou mínimo) relativo então $f'(c) = 0$.

Nota: Os extremos (máximos ou mínimos) relativos de uma função f, estão entre:

- os pontos onde f' se anula.
- os pontos onde f' não existe.
- as extremidades do domínio de f.

Ilustre...

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.
Se $f(a) = f(b)$ então existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário do Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:

1. entre 2 zeros da função f existe, pelo menos, um zero da derivada f'.
2. entre 2 zeros consecutivos da derivada f' existe no máximo, um zero da função f.
3. não existe mais do que um zero de f superior (inferior) ao maior (menor) zero da derivada de f'.

Ilustre...

1. Seja $f(x) = \left(x^2 - 3x - 4\right)\left(x^2 - 4\right)$ .Mostre que $f'(x)$ tem exactamente 3 zeros.

2. Mostre que $f(x) = 10x^{30} - x + 1$ tem, no máximo, 2 raízes reais.

3. Mostre que $f(x) = \sin(x) - x$ tem um único zero. Determine-o.

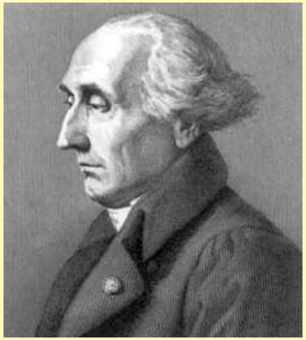
Teorema de Darboux

Seja f uma função com derivada (finita ou infinita) no intervalo [a,b]. Então $f'(x)$ assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

1. Considere $f(x) = x^5 + 4x^2 - x$. Prove que existe pelo menos um ponto $c \in [0, 1] : f'(c) = 5$.

Joseph Lagrange

(1736—1813) Italiano



Aos dezasseis anos tornou-se professor de matemática na Escola Real de Artilharia de Turim. Desde o começo foi um analista, nunca

um geómetra, o que pode ser observado em Méchanique Analytique (Mecânica Analítica), sua obra prima, projectada aos 19 anos, mas só publicada em Paris em 1788, quando Lagrange tinha cinquenta e dois anos. **Nenhum diagrama (desenho) será visto neste trabalho**, diz ele na abertura de seu livro...

Aos vinte e três anos aplicou o cálculo diferencial à teoria da probabilidade, indo além de Isaac Newton com um novo começo na teoria do som.

Entre os grandes problemas que Lagrange resolveu encontra-se aquele da oscilação da Lua. **Por que a Lua apresenta sempre a mesma face para a Terra?** Pela solução deste problema recebeu o Grande Prémio da Academia Francesa de Ciências.

Em carta escrita para D'Alembert, em 1777, diz: **eu tenho sempre olhado a matemática como um objecto de diversão**, mais do que de ambição, e posso afirmar para você que tenho mais prazer nos trabalhos de outros do que nos meus próprios, com os quais estou sempre insatisfeito.

[a]

[a] `http://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_de_Lagrange`

Voltou a seus trabalhos matemáticos como membro da Academia Francesa a convite de Luís. Foi recebido em Paris, em 1787, com grande respeito pela família real e pela academia. Viveu no Louvre até a Revolução, tendo-se tornado **o favorito de Maria Antonieta**.

Aos cinquenta e um anos, Lagrange sentia-se acabado. Era um caso claro de exaustão nervosa, pelo longo período de trabalho excessivo. Falava pouco, parecia estar sempre distraído e melancólico. Era a triste figura da indiferença, tendo perdido, inclusive, o gosto pela matemática.

Um emissário disse a seu pai: **seu filho, orgulho de Piemonte que o produziu, e da França que o possui, honra toda a humanidade por seu génio**.

Teorema de Lagrange

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe pelo menos um $c \in\,]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Illustre...

Corolários do Teorema de Lagrange

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

1. Se $f'(x) = 0\ \forall x \in]a, b[$ então f é constante em $[a, b]$.
2. Se $f'(x) > 0\ \forall x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente em $[a, b]$.
3. Se $f'(x) < 0\ \forall x \in]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

1. Aplique o T.L. à função $f(x) = x^3$ em $[0, b]$ com $b > 0$. Mostre que existe um único ponto que verifica o teorema e determine-o.

2. Mostre que
$$\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0.$$

3. Mostre que

$$3a^2(b-a) < b^3 - a^3 < 3b^2(b-a) \quad \text{com } b > a.$$

4. Mostre que

$$\ln(1+x) < \ln(x-1) + \frac{2}{x-1} \quad \text{com } x > 1.$$

5. Verifique a desigualdade

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \, .$$

Regra de Cauchy...

Teorema de Cauchy

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em $]a,b[$. Se $\forall x \in]a,b[\ g'(x) \neq 0$ então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Regra de L'Hospital

Sejam f e g duas funções que se anulam num ponto a onde estão definidas. Suponhamos que $\exists \epsilon > 0\ \forall x \in V_\epsilon(a) \setminus \{a\} \cap D_f \cap D_g\ g(x) \neq 0$. Se f e g tiverem derivadas não conjuntamente infinitas em a e se $g'(a) \neq 0$,então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Repare que, como vimos no diferencial, para funções diferenciáveis em a e para x próximo de a,

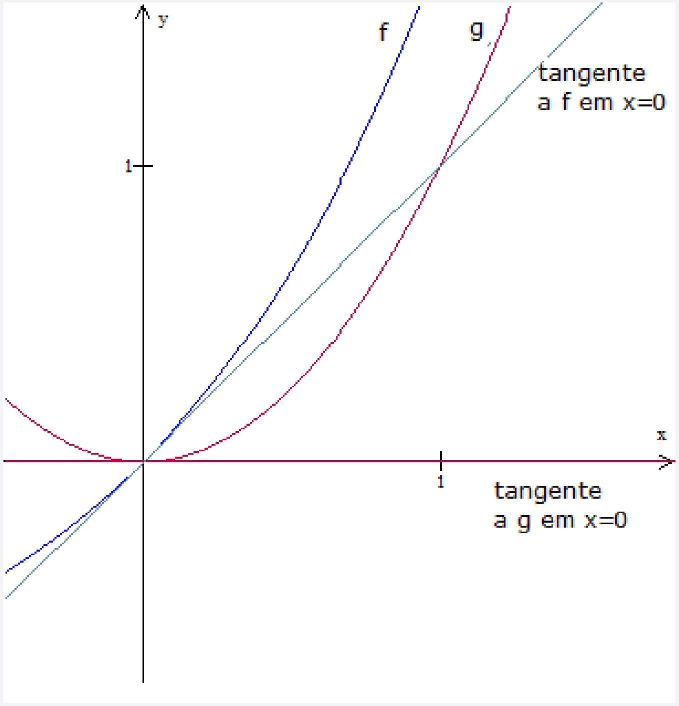
$$f(x) \approx f'(a)(x-a).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}
\end{aligned}$$

para funções ”bem comportadas”.

Geometricamente também se compreende uma vez que as rectas tangentes são boas aproximações da função perto do ponto de tangência:



Regra de Cauchy

Sejam f e g duas funções deriváveis num intervalo aberto I de extremidade a (a pode ser $+\infty$ ou $-\infty$ ou um número real), em que $\forall x \in I$ $g'(x) \neq 0$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0(\text{ ou } \infty)$$

e existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nota: É possível transformar as indeterminações da forma

$$0 \times \infty,\ \infty - \infty, 0^0, 1^\infty \text{ e } \infty^0$$

em indeterminações da forma

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

e em seguida aplicar-lhes a regra de Cauchy.

Nos últimos três tipos de indeterminações é útil se escrever

$$u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v\ln(u)}.$$

1. Calcule:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{\sin(x)}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 2}{\ln(x)}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x)}{x - 3}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{3 + \cos(x)}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} x \ln(x)$

f) $\lim_{x \to +\infty} x - \ln(x)$

g) $\lim_{x \to 0} x^x$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \cos(x)}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 + 3x^4 - 2x + 1}{e^x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos(x)}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+3x^4-2x+1}{e^x}$

Com a Regra de Cauchy é fácil compreender que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$...

j) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 + 3x^4 - 2x + 1}{\ln(x)}$

j) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 + 3x^4 - 2x + 1}{\ln(x)}$

Com a Regra de Cauchy é fácil compreender que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$...

k) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^2}{e^x}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^4-2x+1}{\ln(x)}$

Com a Regra de Cauchy é fácil compreender que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$...

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2}{e^x}$

Com a Regra de Cauchy é fácil compreender que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^n}{e^x} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$...

2. Indique o erro na seguinte demonstração:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+x+5}{x^3+4x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+8x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{6x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$$

Derivadas de ordem superior a 1...

Dada uma função real de variável real, f.
A sua derivada, f', ainda é uma função.
Ao derivá-la obtemos a função f''.

$\vdots$

Podemos continuar este processo indefinidamente...

Derivada de ordem n

Representa-se por

$$f^{(n)}$$

e chama-se

derivada de ordem n

ou

***n*-ésima derivada**

da função f a:

$$f^{(n)} = \left(\left(\left(\left((f')'\right)'\right)'\right)^{\cdots}\right)' \quad \text{derivando } n \text{ vezes.}$$

1. Sendo $f(x) = \cos(x^2)$, calcule
   1.1 $f''(3\sqrt{\pi})$;
   1.2 $f^3(4\sqrt{\pi})$;
   1.3 $f^{(4)}(10\sqrt{\pi})$.

2. Calcule a derivada de ordem n de:
   a) $f(x) = \ln(1 + x)$;

Confirme por indução que a sua dedução está correcta.

b) $f(x) = e^{-x}$;

Confirme por indução que a sua dedução está correcta.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$;

Confirme por indução que a sua dedução está correcta.

Fórmula de Taylor...

Função de classe C^n

Uma função f diz-se **de classe** C^n num intervalo aberto A, do seu domínio, se f for n vezes diferenciável em A e $f^{(n)}$ for contínua em A, escrevendo-se

$$f \in C^n(A).$$

Função de classe C^∞

Se f admitir derivadas de todas as ordens contínuas dizemos que f **é de classe** C^∞ em A, representando-se

$$f \in C^\infty(A).$$

Exemplo: A função $f(x) = x^2 + 3$ é de classe ...

Supondo que existia um polinómio de grau 4 igual a uma função $f(x)$...

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

De $x = 0$ obtém-se $e =$ ____

Derivando obtemos ____
De $x = 0$ obtém-se $d =$ ____

Derivando obtemos ____
De $x = 0$ obtém-se $c =$ ____

Derivando obtemos ____
De $x = 0$ obtém-se $b =$ ____

Derivando obtemos ____
De $x = 0$ obtém-se $a =$ ____

Portanto

$$f(x) = \boxed{}$$

Supondo que existia um polinómio de grau 5 igual a uma função $f(x)$...

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g, \quad a, b, c, d, e, g \in \mathbb{R}.$$

De $x = 0$ obtém-se $g =$

Derivando obtemos
De $x = 0$ obtém-se $e =$

Derivando obtemos
De $x = 0$ obtém-se $d =$

Derivando obtemos
De $x = 0$ obtém-se $c =$

Derivando obtemos
De $x = 0$ obtém-se $b =$

Derivando obtemos
De $x = 0$ obtém-se $a =$

Portanto

$$f(x) =$$

Supondo que existia um polinómio com potências de (x-3) de grau 4 igual a uma função $f(x)$...

$$f(x) = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

De $x = 3$ obtém-se $e =$

Derivando obtemos

De $x = 3$ obtém-se $d =$

Derivando obtemos

De $x = 3$ obtém-se $c =$

Derivando obtemos

De $x = 3$ obtém-se $b =$

Derivando obtemos

De $x = 3$ obtém-se $a =$

Portanto

$$f(x) =$$

Polinómio de Taylor

Consideremos uma função n vezes diferenciável em $x = a$. Designamos por **polinómio de Taylor de grau** n de f no ponto a:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Polinómio e Fórmula de McLaurin

Se $a = 0$ o polinómio e a fórmula de Taylor designam-se respectivamente por **polinómio e fórmula de McLaurin**.

Resto de Lagrange

Designamos por **Resto de ordem** n a diferença entre f e p_n no ponto x, isto é $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, podendo ser dado pela expressão:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad c \in \,]x, a[$$

chamada **Resto de Lagrange**.

Teorema de Taylor-Lagrange

Seja $f : D \subset R \to R$, $n+1$ vezes diferenciável em $x = a$, então $\forall x \in D \quad f(x) = \underbrace{p_n(x) + R_n(x)}_{\text{fórmula de Taylor}}$ em que $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

O polinómio de Taylor de grau n de uma função f é o polinómio de grau n que melhor aproxima a função f... e quanto maior for o n melhor é a aproximação...

1. Escreva a fórmula de Taylor de f no ponto indicado:
   a) $f(x) = e^x$, no ponto 1, de grau 4.
   b) $f(x) = \sin(x)$, no ponto 0, de grau 5.

http://www.ma.utexas.edu/cgi-pub/kawasaki/plain/infSeries/6.html
ou
http://www.math.jhu.edu/~jrm/vander/stable/TPTest.html

2. Escreva o polinómio de grau 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \ln(1+x)$ perto do ponto 0.

3. Escreva a fórmula de McLaurin $f(x) = 132x^{150} - 3x + 5$ de grau 150.

4. Use a fórmula de Taylor para calcular os limites

   a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

   b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

c) $\lim_{x \to 0} x - x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Concavidade, pontos de inflexão e extremos...

Sejam f uma função diferenciável no ponto $x = a$ e t a recta tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$, de equação

$$y = f(a) + f'(x)(x - a).$$

Dizemos que uma função f **tem concavidade voltada para baixo(cima)** no ponto a se existir uma vizinhança do ponto a onde o gráfico de f se encontra abaixo (acima) da recta t.
Se definirmos

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \simeq \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2,$$

f tem concavidade voltada para baixo no ponto a se

$$f(x) < f(a) + f'(x)(x - a),$$

ou seja, se

$$r(x) < 0,$$

ou seja, se

$$\mathbf{f''(x) < 0}.$$

Analogamente, f tem concavidade voltada para cima no ponto a se $\mathbf{f''(x) > 0}$.

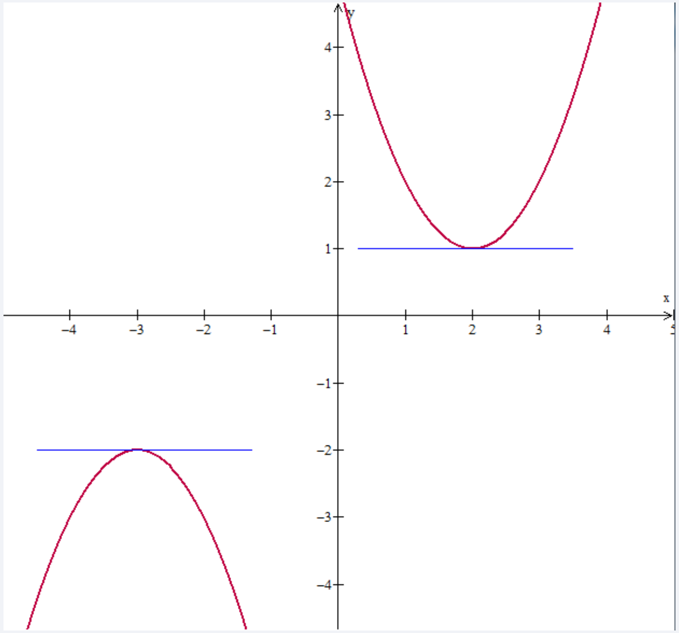
Concavidade

f tem **concavidade voltada para cima** no ponto a

$$\mathbf{f''(a) > 0}.$$

f tem **concavidade voltada para baixo** no ponto a se

$$\mathbf{f''(a) < 0}.$$

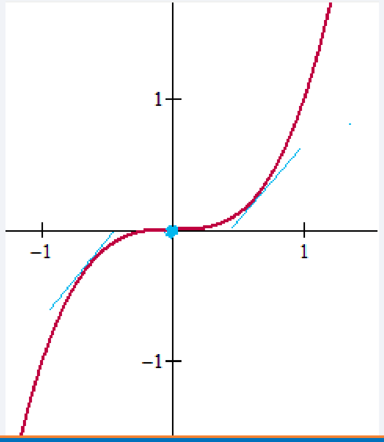


Côncava/convexa

Uma curva diz-se **côncava** se a sua concavidade está voltada para baixo, diz-se **convexa** se a sua concavidade está voltada para cima.

Ponto de inflexão

Denomina-se **ponto de inflexão**, de uma função f duas vezes continuamente diferenciável num conjunto A, o ponto $a \in A$ para o qual as concavidades à esquerda e à direita têm sentidos diferentes.



Teorema

Seja f uma função derivável sobre um intervalo A, tal que a sua derivada f' seja uma função contínua e vamos supor que f possui um ponto crítico $x = a$ em A, isto é, $f'(a) = 0$.

- Se $f''(a) < 0$ então $x = a$ é um ponto de máximo para a função f.
- Se $f''(a) > 0$ então $x = a$ é um ponto de mínimo para a função f.

Teorema

Seja f uma função que possui todas as n primeiras derivadas contínuas sobre um intervalo A. Se

$$f'(a) = f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$$

mas $f^{(n)}(a) \neq 0$.
Assim:

- Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$,
  $x = a$ é maximizante local de f.
- Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$,
  $x = a$ é minimizante local de f.
- Se n é ímpar e $f^{(n)}(a) \neq 0$,
  $x = a$ é ponto de inflexão de f.

1. Estude os extremos da função

$$f(x) = x^4.$$

Assimptotas

Assimptota vertical

A recta $x = a$ é uma **assimptota vertical** ao gráfico de f, se a for um ponto aderente ao domínio de f e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty.$$

Ilustre...

Uma recta de equação $y = mx + b$ diz-se **assimptota** ao gráfico de f em $+\infty$ (resp. $-\infty$) se existirem pontos do domínio de f em qualquer vizinhança de $+\infty$ (resp. $-\infty$) e se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - b) = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - b) = 0\right)$$

Assim, dividindo por x

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{b}{x}\right) = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}\left(\frac{f(x)}{x} - m - 0\right) = 0$$

logo,

$$m = \lim_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}$$

Por outro lado, é óbvio de (1) que

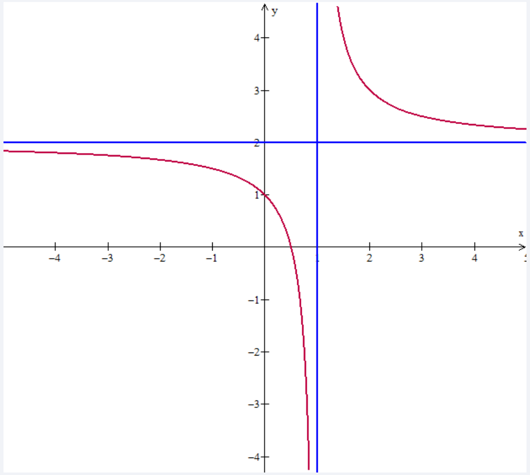
$$b = \lim_{x\to+\infty(-\infty)}(f(x) - mx)$$

Assimptota

Uma recta de equação $y = mx + b$ diz-se **assimptota** ao gráfico de f em $+\infty$ (resp. $-\infty$) se existirem pontos do domínio de f em qualquer vizinhança de $+\infty$ (resp. $-\infty$) e se existirem m e b:

$$m = \lim_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty(-\infty)}(f(x) - mx)$$



1. Determine as assimptotas da função

$$f(x) = \frac{5 + x}{x}.$$

Para praticar . . .

1. Estude as funções que se seguem, quanto a:

    a) domínio:
    b) paridade;
    c) injectividade;
    d) continuidade;
    e) derivabilidade;
    f) monotonia;
    g) concavidades e pontos de inflexão;
    h) extremos;
    i) assimptotas;
    j) faça um esboço do gráfico;
    k) conjunto de chegada.

    No fim, mas APENAS NO FIM, confirme os seus resultados fazendo o gráfico da função no *WXmaxima*.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

(cont.)

$$g(t) = e^{-t^2}$$

(cont.)

$$h(x) = x + \ln|x|$$

(cont.)

$$k(t) = te^{\frac{1}{t}}$$

(cont.)

$$r(u) = e^{-\frac{u}{2}} \sin(2\pi u)$$

(cont.)

2. Seja C a curva plana $y = x^2 - 5x + 6$.
   a) Determine o ponto p no qual a recta tangente à curva é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.
   b) Justifique que, dada arbitrariamente uma recta não vertical existe um e um só ponto de C no qual a tangente é paralela à recta dada.

4. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.
   a) Determine o domínio de f.
   b) Calcule os zeros de f.
   c) Caracterize uma restrição invertível da função f.
   d) Caracterize a função inversa de f.
   e) Calcule $\arcsin\left(2f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$.

3. A população P da China a partir de 1993, em milhões, pode ser aproximada pela função

$$P = 1.15(1.014)^t$$

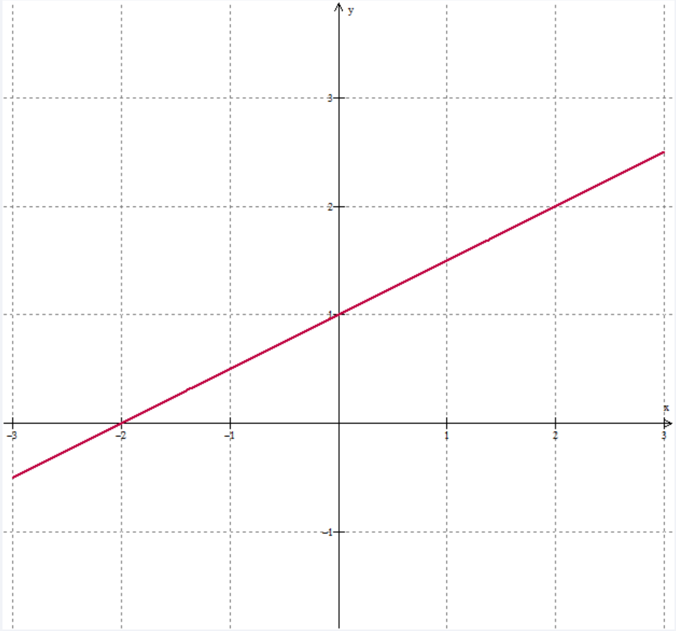
onde t é o número de desde o início em 1993. De acordo com este modelo, quão rápido foi o crescimento da população no início de 1993? E no início de 1995? Dê uma resposta em milhões de pessoas por ano.

5.a) Faça o gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ e $g(x) = f(x) + 3$ no mesmo sistema de eixos. O que é que pode dizer sobre o declive das rectas tangentes dos dois gráficos no ponto $x = 0$? E no ponto $x = 2$? E em qualquer ponto $x = x_0$?

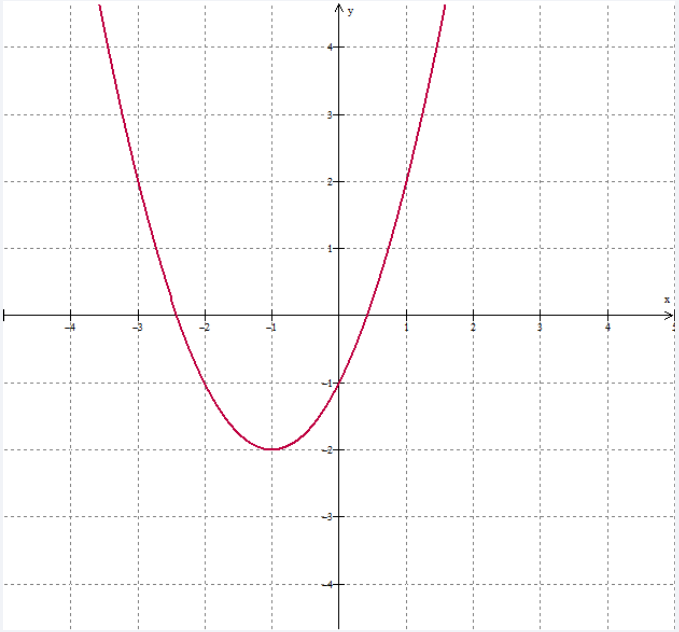
b) Explique porque é que adicionar uma constante C a qualquer função não altera o valor do declive do seu gráfico, em qualquer ponto.
Sugestão: Considere $g(x) = f(x) + C$ e calcule a derivada por definição para f e para g.

6. Faça um esboço do gráfico da derivada da função f representada a seguir.

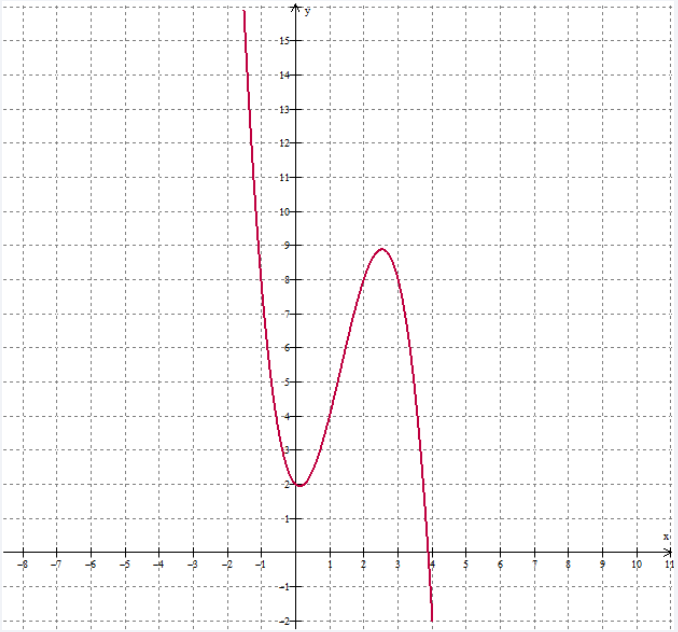
   a)



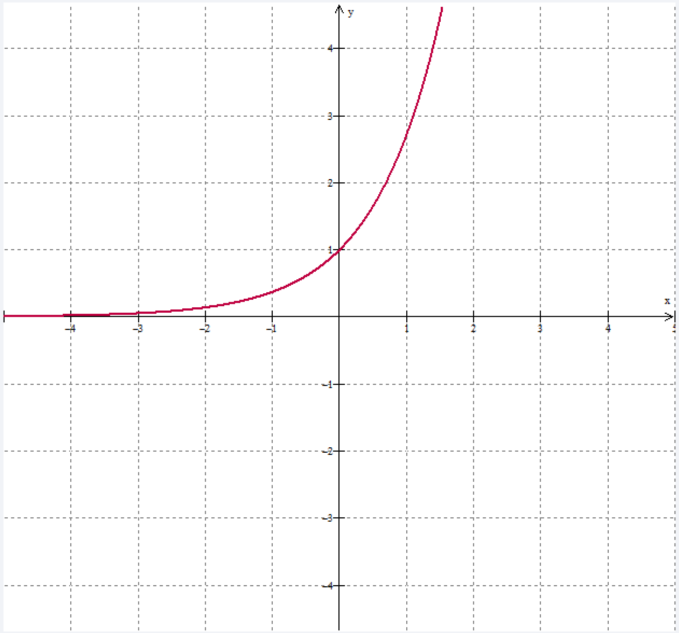
b)



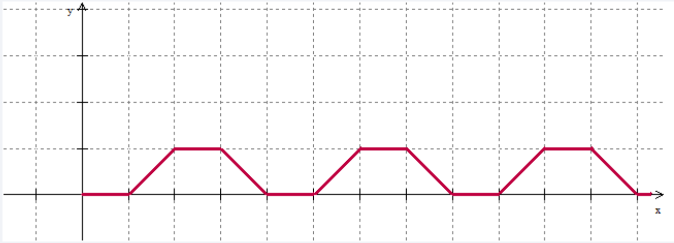
c)



d)



7. A figura seguinte mostra o gráfico da voltagem através de uma condensador eléctrico como função do tempo. A corrente é proporcional à derivada da voltagem; a constante de proporcionalidade é positiva. Esboce o gráfico da corrente como função do tempo.



8. Seja f uma função par. Que pode afirmar quanto à paridade da função f'? Utilize gráficos para obter uma previsão. Confirme analiticamente.

9. Seja f uma função ímpar. Que pode afirmar quanto à paridade da função f'? E f''? Utilize gráficos para obter uma previsão. Confirme analiticamente.

10. Se $l(v)$ é a eficácia da gasolina, em km/L de um carro a 100 km/h, qual é a unidade de $l'(90)$? Qual é o significado prático da afirmação $l'(55) = -0.54$?

11. A aceleração da gravidade, g, varia com a altura acima da superfície da Terra de uma certa forma. Se formos abaixo da superfície da Terra, g varia de forma diferente. Pode-se provar que g é dada por

$$g = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & se \quad r < R \\ \frac{GM}{r^2} & se \quad r \geq R \end{cases}$$

onde R é o raio da Terra, M é a massa da Terra, G é a constante gravitacional e r é a distância ao centro da Terra.

a) Esboce o gráfico de g em função de r.
b) g é uma função de r contínua? Justifique.
c) g é uma função de r diferenciável? Justifique

12. Esboce o gráfico de uma função contínua com as seguintes propriedades:

    a) $f''(x) > 0$ para, $x < 2$ e $x > 2$, e $f'(2)$ não está definida.

    b) $f''(x) > 0$ para $x < 2$, $f'(x) < 0$ para $x > 2$ e $f'(2)$ não está definida.

13. Indique um exemplo de uma função que tenha um ponto crítico em $x = 2$ e um ponto de inflexão em $x = 4$.

14. Esboce o gráfico de uma função com apenas 2 pontos críticos, um é um mínimo local e o outro não é máximo nem mínimo local.

15. Indique funções com 0, 1 , 2 e infinitos pontos críticos.

16. Para uma dada constante positiva C, a temperatura de um paciente T, devida a uma dose D de um certo medicamento é dada por

$$T = \frac{C}{2} - \frac{D}{3} D^2.$$

a) Que dose maximiza a variação da temperatura?
b) A sensibilidade do corpo ao medicamento é definida como $\frac{dT}{dD}$. Que dose maximiza a sensibilidade?

17. O armazém de uma empresa de construção civil guarda sacas de cimento e tem que decidir quantas vezes e que quantidade deve encomendar. É mais barato, em média, encomendar mais quantidade porque reduz o preço unitário. Por outro lado, maiores encomendas implicam maiores despesas de armazenagem. O armazém encomenda sempre a mesma quantidade q. O custo total semanal C de encomendar e armazenar é de

$$C = \frac{a}{q} + bq$$

onde a e b são constantes positivas.

a) Qual dos termos $\frac{a}{q}$ e bq representa o custo de encomenda e qual representa o custo de armazenagem?
b) Que valor de q dá um menor custo total?

18. Uma reacção química converte a substância A na substância Q; A presença de Y catalisa a reacção. No início da reacção, a quantidade de A presente em a gramas. Após t segundos, a quantidade de Y presente é y gramas. A taxa de reacção, em gramas por segundo, é dada por

$$Taxa = ky(a-y)$$

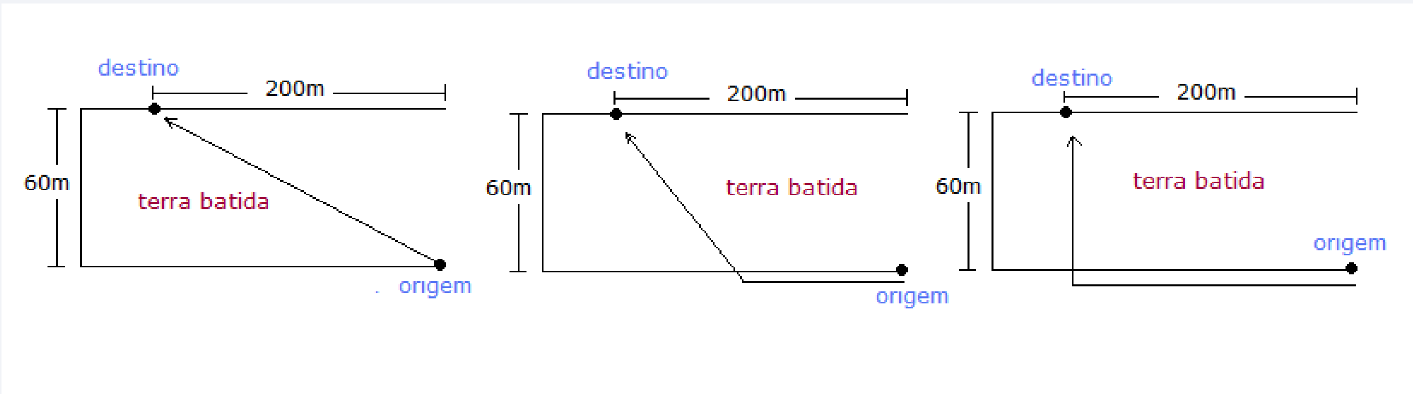
onde k é uma constante positiva.

a) Para que valores de y a taxa é positiva ou nula? Esboçe o gráfico da taxa como função de y.

b) Para que valores de y a taxa é máxima?

19. Suponha que pretende fazer um depósito cilíndrico para guardar 1000 m^3 de água, utilizando o mínimo de material. Suponha que o material do fundo e da tampa do depósito é o mesmo da parede. Quais as melhores dimensões para o depósito?

20. O António quer transportar material para uma obra num carrinho de mão. A andar em alcatrão ele percorre 6 km/h e em terra batida ele percorre 4.5 km/h. Qual o trajecto que o António vai escolher para fazer o percurso no menor tempo?

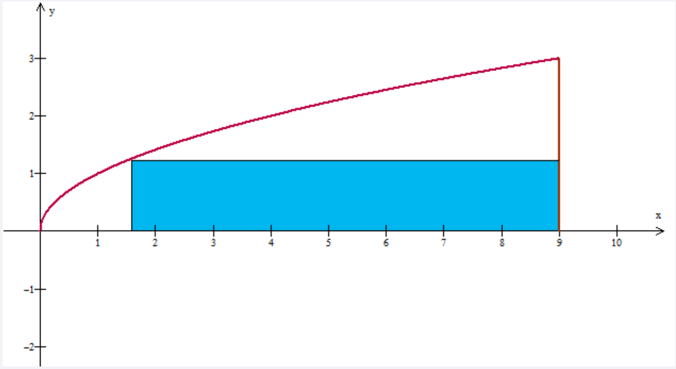


21. O momento flector numa viga simplesmente apoiada, a uma distância x de um dos apoios, é dado por

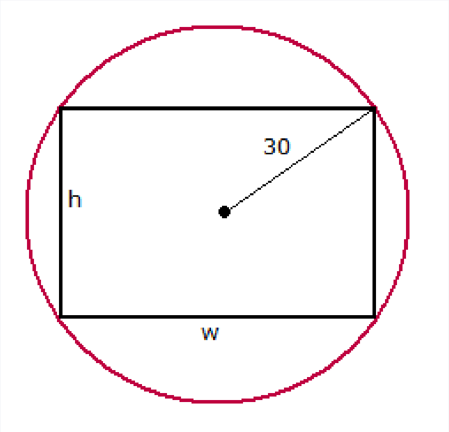
$$M = \frac{1}{2}\omega L x - \frac{1}{2}\omega x^2$$

onde L é o comprimento da viga e ω é a carga por unidade de comprimento (carga uniforme). Determine o ponto da viga onde o momento é maior.

22. A figura seguinte mostra as linhas $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$ e um rectângulo paralelo aos eixos e a extremidade esquerda em $x = a$. Determine as dimensões do rectângulo tendo a maior área possível.



23. Uma viga rectangular é cortada de um toro cilíndrico de raio 30 cm. A robustez de uma viga de largura w e altura h é proporcional a wh^2 (ver figura seguinte). Determine a largura e altura da viga mais robusta.



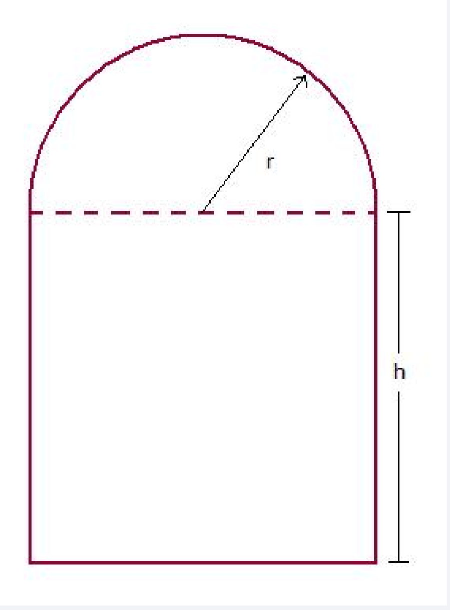
24. Um arquitecto paisagista pretende vedar uma zona rectangular de 30 m^2 num jardim botânico. Vai usar arbustos que custam 25€ por metro em três dos lados e no outro arbustos a 10€ por metro. Calcule o menor custo total.

25. Pretende-se construir uma caixa cúbica sem topo, com um volume fixo V, determine as dimensões que minimizam a área.

26. Qual é o ponto da parábola $y = x^2$ que está mais próximo do ponto $(1, 0)$?
Sugestão: Minimize o quadrado da distância para evitar raízes quadradas.

27. Qual é o ponto da parábola $y = x^2$ que está mais próximo do ponto $(3, 0)$?
Sugestão: Minimize o quadrado da distância para evitar raízes quadradas.

28. A secção transversal de um túnel é um rectângulo de altura *h* ao qual é sobreposto um semi-círculo de raio r para formar o tecto (ver figura).Se a área da secção transversal é *A*, determine as dimensões da secção transversal que minimizam o perímetro.



29. De todos os rectângulos com uma dada área, A, qual o que tem menor diagonal?

30. De todos os rectângulos com uma dado perímetro, P, qual o que tem menor área?

31. Suponha que tem uma empresa de venda de materiais de construção. Contrata com um cliente que lhe fornece até 400 paletes de tijolos, com o valor exacto a ser determinado pelo cliente mais tarde. O preço vai se de 90€ por palete até 300 paletes e, acima de 300 o preço será reduzido 0.25€ a todas as paletes. Qual é a maior e menor receita que a empresa espera fazer com o contrato?

Bibliografia*

José Alberto Rodrigues.
Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
Edições Colibri, 2007.

Deborah Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, Flath, Lock, and Lomen.
Calculus: Single variable.
John Willey Sons, Inc, 4th edition, 2005.

Salas, Hille, and Etgen.
Calculus: One variable.
John Wiley Sons, Inc., 9th edition, 2003.

Dale Varberg and Edwin J. Purcell.
Calculus.
Prentice-Hall, Inc., 7th edition, 1997.

Sherman K. Stein and Anthony Barcellos.
Calculus and analytic geometry.
McGraw-Hill, Inc., 5th edition, 1992.

Howard Anton.
Cálculo: um novo horizonte, volume 1.
Bookman, 6th edition, 1999.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.