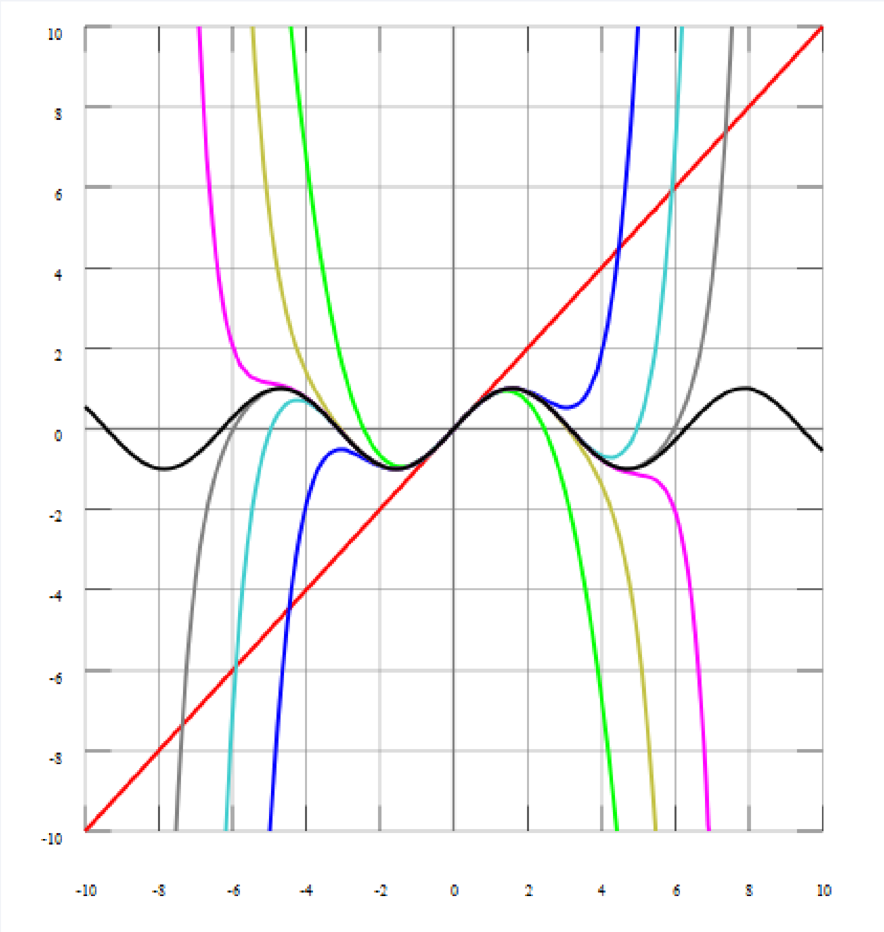
Capítulo 08: Séries de potências



Sandra Gaspar Martins
14/04/2011

Introdução

Calcule uma *boa* aproximação de

$$e^3 = \boxed{}$$

Calcule uma *boa* aproximação de

$$\mathit{ln}(1.2) = \boxed{}$$

Calcule uma *boa* aproximação de

$$\sin\left(\frac{3}{7}\pi\right) = \boxed{}$$

Então...

deve conhecer uma forma de calcular estes valores sem uma calculadora....

pois....

É natural que não o consiga fazer!!!!

a forma mais prática de obter boas aproximações dos valores pedidos é ...

a forma mais prática de obter boas aproximações dos valores pedidos é ...
utilizando séries de potências!!!!!
vamos aprendê-lo...

Mais...
até as calculadoras utilizam séries de potências ...
elas permitem-nos transformar funções *complicadas* como
logaritmos, exponenciais, senos, cosenos, tangentes, arco-cosenos, arco-tangentes,...
apenas em somas e produtos!!!

Vamos estudar as séries de potências, determinar os valores para os quais são convergentes ...

Vamos estudar funções definidas por séries de potências ....

Depois estudaremos as séries de Taylor e perceberemos como representam funções...

Vamos utilizar séries de Taylor de referência para determinar outras séries de Taylor...

Finalmente vamos aproximar funções por polinómios utilizando séries de Taylor...

As aplicações das séries de potências são infinitas
uma vez que nos permitem ter aproximações de funções *complicadas* por polinómios...
e portanto podem-se utilizar sempre que se estiver a utilizar uma função...

Objectivos

No final deste capítulo deve:

- ☐ identificar séries de potências;
- ☐ determinar o raio de convergência de uma série de potências;
- ☐ estudar funções definidas por séries de potências;
- ☐ calcular a série de Taylor de uma dada função;
- ☐ utilizar séries de Taylor de referência para determinar outras séries de Taylor;
- ☐ estimar a grandeza de funções utilizando séries de Taylor;
- ☐ aplicar séries de Taylor para simplificar funções *complicadas*.

Competências globais

Também deve:

- ☐ escrever e verbalizar os seu pensamentos de uma forma clara, concisa e organizada;
- ☐ justificar os raciocínios;
- ☐ compreender e utilizar a linguagem matemática;
- ☐ utilizar programas computacionais como ferramenta de apoio ao estudo;
- ☐ formular hipóteses; interpretar, prever e criticar resultados no contexto do problema;
- ☐ fazer raciocínios demonstrativos, usando métodos adequados (n290es, incluem-se o método de redução ao absurdo, o método de indução matemática e a utilização de contra-exemplos);
- ☐ ser autónomo na auto-avaliação e, se necessário, na procura de elementos complementares de estudo.

Note que:

- Para responder às perguntas ou fazer anotações, pode utilizar qualquer ferramenta do *Adobe Reader*:[a]
  - Gravação áudio
  - Caixa de texto
  - Sublinhar
  - Realçar
  - Chamada
  - Nuvem
  - Lápis
  - ...
- As figuras e textos sobre matemáticos foram retirados da *web*, para aceder à página original basta *clicar* na figura.

[a]Se não domina adequadamente o Adobe Reader, veja o tutorial em

Série de potências

Série de potências de y

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n$$

$$= a_0 + a_1\, y + a_2\, y^2 + a_3\, y^3 + a_4\, y^4 + a_5\, y^5 + a_6\, y^6 + \ldots$$

com $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão real.

Teorema

Dada a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n$$

chama-se **raio de convergência** (se existir) a

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Para $|y| < r$ a série converge.
Para $|y| > r$ a série diverge.
Para $|y| = r$ temos que estudar caso a caso.

1. Estude quanto à convergência:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3}\, y^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^n \, (x-3)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,(n+1)}\, x^{n+3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n^2} \, (x-1)^{n-2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Teorema

Dada a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n.$$

1. Para $|y| \leq r_0 < r$ a série converge uniformemente para uma função **indefinidamente diferenciável**, tendo-se para todo o $k \geq 1$:

$$\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \frac{d}{dy}(y^n),\ |y| \leq r_0 < r.$$

2. Se f for uma função indefinidamente diferenciável, para a qual a série de potências converge, e $y = x - a$ então $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
3. Se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, y^n$ são duas séries de potências convergentes quando $|y| < r$ tais que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, y^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, y^n$ então $a_n = b_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real. Indique, se possível, o seu domínio, a derivada, o domínio de diferenciabilidade, os pontos críticos, a monotonia e as concavidades.
   a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3}\, y^{2n}$
   b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^n\, (x-3)^n$
   c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$

Série de Taylor

Dada uma função real de variável real vamos procurar o polinómio que mais se aproxima dessa função, "perto" do ponto $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5 + \dots \\
f(0) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Rightarrow a = \boxed{\qquad} \\
f'(x) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
f'(0) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Rightarrow b = \boxed{\qquad} \\
f''(x) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
f''(0) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Rightarrow c = \boxed{\qquad} \\
f'''(x) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
f'''(0) &= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Rightarrow d = \boxed{\qquad} \\
& \dots \\
\text{Portanto } f(x) &\approx \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

Série de Taylor

Consideremos uma função f, indefinidamente diferenciável numa vizinhança do ponto a.
Designamos por **série de Taylor** de f no ponto a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Polinómio de Taylor

Consideremos uma função n vezes diferenciável em $x = a$.
Designamos por **polinómio de Taylor de grau n** de f no ponto a:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Série/polinómio de Mc Laurin

Se $a = 0$ a série/polinómio de Taylor designa-se por **série/polinómio de McLaurin**.

Resto

Designamos por **Resto de ordem n** a diferença entre f e p_n no ponto x, isto é,

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x),$$

podendo ser dado pela expressão:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad c \in]x, a[$$

chamada **Resto de Lagrange**.

Teorema de Taylor-Lagrange

Seja $f : D \subset R \to R$, indefinidamente diferenciável num intervalo I, caracterizado por $|x - a| < r$ $(r \neq 0)$, então a série de Taylor de f converge pontualmente para $f(x)$ no intervalo I se

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0;$$

ou se,
existirem números reais positivos M e k tais que

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < Mk^n,$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$.

http://www.math.psu.edu/dlittle/java/calculus/taylorseries.html

1. Escreva o polinómio de Taylor de f no ponto indicado:
   a) $f(x) = e^x$, no ponto 1, de grau 4.
   b) $f(x) = \sin(x)$, no ponto 0, de grau 5.

   Ver o applet da página anterior.

2. Escreva o polinómio de grau 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \ln(1 + x)$ perto do ponto 0.
3. Escreva o polinómio de McLaurin de $f(x) = 132x^{150} - 3x + 5$ de grau 150.
4. Seja $p(x) = 2 + 3x^2 - 5x^3 + 2x^5$ o polinómio de McLaurin de grau 5 de uma função f indefinidamente diferenciável.
   Calcule:
   a) $f(0) =$
   b) $f'(0) =$
   c) $f''(0) =$
   d) $f'''(0) =$
   e) $f^{(4)}(0) =$
   f) $f^{(5)}(0) =$
   g) 0 é um ponto crítico de f?

5. Calcule as séries de McLaurin das funções:
   a) $f(x) = e^x$
   b) $f(x) = \sin(x)$
   c) $f(x) = \cos(x)$
   d) $f(x) = (1 + x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
   e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$
   f) $f(x) = \ln(1 + x)$

Séries de McLaurin de referência

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \qquad |x| < 1.$$

1. Use os desenvolvimentos em série de McLaurin de referência para calcular a série de Taylor das seguintes funções num ponto conveniente:
   a) $f(x) = \sin(x - \pi)$
   b) $f(x) = \sqrt{3 + x}$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$
   (Observe que tem o mesmo resultado utilizando dois desenvolvimentos diferentes.)
   e) $f(x) = e^{x^4} + \cos(x^2)$
   f) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)\cos(x)$
   g) $f(x) = 7x^5 + 3x^2 - 1$
   h) $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$ (série de McLaurin e de Taylor no ponto $x = -1$)
2. Derive a série de McLaurin do seno e obtenha a do coseno e vice-versa:
   a) $\cos(x) = (\sin(x))' = ...$
   b) $\sin(x) = (\cos(x))' = ...$
3. Pelas suas séries de Taylor indique qual destas funções é a maior e menor, para θ *próximo* de 0.
   a) $1 + \sin(\theta)$
   b) e^{θ}
   c) $\frac{1}{\sqrt{1-2\theta}}$
4. Usando a série de Taylor, calcule um valor aproximado de e^3, de $\ln(1.2)$, de $\sin(\frac{3}{7pi})$...

5. Um fino disco de raio a e massa M está disposto na horizontal. Uma partícula de massa m está à altura h exactamente acima do centro do disco. A força gravitacional F, exercida pelo disco na massa m é dada por

$$F = \frac{2GMmh}{a^2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{(a^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Suponha que $a < h$ e considere F como função de a e com as outras quantidades constantes.

a) Expanda F como uma série de $\frac{a}{h}$. Indique os dois primeiros termos não nulos.

b) Mostre que a aproximação de F obtida usando apenas os dois termos não nulos da série é independente do raio, a.

c) Se $a = 0.02h$ por que percentagem é que a aproximação da alínea a) difira da aproximação da alínea b).

Para Praticar . . .

1. Estude quanto à convergência as série de potências
   a)
   $$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n-3}} (2x+3)^n$$
   b)
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^5} (x-2)^n$$
2. Utilizando uma série conhecida, determine a série de Taylor de
   a)
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$$
   b)
   $$g(x) = e^{-2x}$$
   c)
   $$h(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+2x)}}$$
   d)
   $$j(x) = \frac{1}{1+2x^2}$$
3. Seja f a função real de variável real definida por
   $$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
   a) Calcule $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ e deduza uma expressão para $f^{(n)}(x)$.
   b) Escreva a fórmula de Taylor-Lagrange de ordem 2 de f em torno do ponto $x = 1$.
   c) Usando a alínea anterior, calcule o limite
   $$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) + x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

Mapa Conceptual

Construa um mapa conceptual deste capítulo. (Usando as ferramentas de edição e o *Instantâneo* do *Adobe Reader*)

(continuação)

(continuação)

Bibliografia*

- José Alberto Rodrigues.
  Métodos matemáticos em engenharia: Modelos em $\mathbb{R}$.
  Edições Colibri, 2007.
- Deborah Hughes-Hallett, Gleason, McCallum, Flath, Lock, and Lomen.
  Calculus: Single variable.
  John Willey Sons, Inc, 4th edition, 2005.
- Howard Anton, Irl Bivens, and Stephen Davis.
  Cálculo, volume 2.
  Bookman, 8th edition, 2007.
- David a. Smith and Laurence C. Moore.
  Calculus: Modeling and Application.
  D.C.Heath and Company., 1st edition, 1996.
- Salas, Hille, and Etgen.
  Calculus: One variable.
  John Wiley Sons, Inc., 9th edition, 2003.
- Dale Varberg and Edwin J. Purcell.
  Calculus.
  Prentice-Hall, Inc., 7th edition, 1997.

*Por ordem de adequação como complemento ao estudo.

Notas

(Algumas páginas em branco para utilizar como lhe aprouver...)